Hipérides Zanello

Aritmética Primária

TERCEIRA EDIÇÃO

1941
COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

ARITMÉTICA PRIMÁRIA

HIPÉRIDES ZANELLO

Doutor em Ciências Físicas e Matemáticas. Catedrático da Faculdade de Engenharia do Paraná, do Instituto de Química do Paraná, da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras. Professor do Ginásio Paranaense e do Colégio Iguassú. Sócio efetivo do Instituto Histórico e Geográfico Paranaense.

★

ARITMÉTICA PRIMÁRIA

Obra oficialmente adotada no Distrito Federal, Baía, Paraná, etc.

★

3.ª EDIÇÃO

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO - RIO DE JANEIRO - RECIFE - PÔRTO ALEGRE
1941

DO MESMO AUTOR

Elementos de Geometria e Desenho Linear (curso primário) - 4.ª edição.

Ciências Físicas e Naturais (curso primário) - 6.ª edição.

Física — 3.ª série ginasial - 2.ª edição.

Ciências Físicas e Naturais — 1.ª série ginasial - 7.ª edição.

Física — 4.ª série ginasial.

Física — 5.ª série ginasial (em preparação).

Ciências Físicas e Naturais — 2.ª série ginasial - 6.ª edição.

Edições da
COMPANHIA EDITORA NACIONAL
São Paulo

Ao meu eminente mestre

DR. FRANCISCO MARTINS FRANCO
Catedrático da Faculdade de Medicina do Paraná,

Consagro.

Ao brilhante clínico e amigo

DR. ARMANDO PETRELLI,

Ofereço.

CAPÍTULO I

Preliminares

Noção de grandeza. — Chama-se *grandeza* a tudo aquilo que pode aumentar ou diminuir. *Exemplos :* o *conjunto* de carteiras, mapas, alunos, etc., de uma sala de aula, o *comprimento* de uma estrada, o *pêso* de um saco de farinha, a *duração* de uma aula, etc.

As grandezas distinguem-se em *contínuas* e *descontínuas*.

As grandezas contínuas constituem um conjunto homogêneo e podem ser aumentadas ou diminuídas de partes tão pequenas como se queira. *Exemplos :* o comprimento de uma estrada, o pêso de um saco de farinha, a duração de uma aula, etc.

As grandezas *descontínuas* são constituídas por coleções de objetos distintos e não podem ser aumentadas ou diminuídas de partes tão pequenas como se queira. *Exemplo :* o conjunto de carteiras, mapas, alunos, etc. de uma sala de aula.

Para se fazer idéia exata de uma grandeza contínua é preciso *medí-la,* isto é, compará-la com outra conhecida e da mesma espécie, denominada *unidade.*

Para se ter idéia exata de uma grandeza descontínua, é necessário contar os objetos que formam a sua coleção. Um dêsses objetos é a *unidade.*

E' assim que quando se quer avaliar o comprimento de uma estrada, procura-se saber quantos metros, decâmetros, etc. êle contém; ao passo que, quando se quer conhecer o número de carteiras, mapas, alunos, etc. de uma sala, é necessário contá-los.

Portanto, *unidade* é uma grandeza conhecida, com a qual se comparam as outras da mesma espécie, que se medem ou contam.

Na medida das grandezas contínuas, a unidade é da mesma espécie que a grandeza que se quer medir, mas geralmente *arbitrária*. E' assim que, na medida do comprimento de uma estrada, a unidade empregada pode ser o metro, decâmetro, etc., mas sempre representando comprimento.

Nas grandezas descontínuas, a unidade é um ser ou coleção de sêres da mesma espécie dos que se contam. E' assim que, quando se contam os alunos de uma sala, a unidade é um aluno, ou uma coleção de alunos, como dezenas, centenas, etc.

Noção de número. — Da avaliação das grandezas contínuas e descontínuas resulta a noção de número. Assim, quando se contam os alunos de uma sala de aula, tomando *um aluno* como unidade e encontram-se 32 alunos, 32 é o número resultante desta avaliação. Do mesmo modo, quando se avalia o comprimento de uma estrada, tomando o quilômetro como unidade e acham-se 12 quilômetros, 12 é o número resultante dessa medida.

Portanto, *número* é o resultado da comparação de uma grandeza com a sua unidade. O número pode ser *inteiro*, *fração* e *misto*.

Número inteiro é aquele que resulta da avaliação de uma grandeza que contém a unidade uma ou mais vêzes exatamente. *Exemplo:* vinte e oito metros, trinta e cinco alunos, etc.

Fração é o número que designa uma ou mais partes de uma unidade dividida em qualquer número de partes iguais. Quando a unidade é, por exemplo, uma laranja, e esta for dividida em 6 partes iguais (sextos), o todo formado por 5 dessas partes é uma grandeza que, avaliada tomando como unidade uma laranja, dá o número *cinco sextos*.

Número misto é o que resulta da avaliação de uma grandeza maior que a unidade, mas que não contém esta uma ou mais vêzes exatamente. E' um número que contém uma ou mais vêzes a unidade e uma ou mais partes dela. *Exemplo:* duas horas e três quartos, etc. O número misto, como vemos, é formado de um número inteiro mais uma fração.

Números abstratos e concretos. — Os números, conforme se faz ou não abstração do conjunto, podem ser abstratos ou concretos.

Número abstrato é o que não indica a espécie de unidade a que se refere. *Exemplo:* 7 unidades.

Número concreto é o que vem seguido do nome da unidade a que se refere. *Exemplo:* 15 alunos.

Formação dos números. — *Um* ou a *unidade* é o menor número inteiro. Juntando *um* a si mesmo, obtém-se outro número inteiro, que aumentado de um, dá outro número inteiro, e assim por diante. Continuando da mesma maneira, formamos uma série de números inteiros, numa ordem determinada,

que poderemos prolongar à vontade. Tais números inteiros, formados numa determinada ordem, constituem a *série natural dos números inteiros abstratos*, que é, como se vê, *ilimitada*.

NUMERAÇÃO

A princípio, dava-se a cada número da série natural um nome especial e cada um era representado por um sinal gráfico também especial. Novos números foram sendo empregados, com o progresso das relações entre os povos, e não era mais possível então empregar nomes e sinais gráficos arbitrários e diferentes para enunciar e representar todos os números usados. Mesmo assim, não era possível reter de memória tão grande número de denominações e símbolos.

A essa numeração *espontânea* ou *natural* sucedeu-se a numeração *sistemática* ou *regular*, isto é, o sistema de numeração.

Assim, a *numeração* é o conjunto de regras e artifícios que permitem a enunciação e a representação dos números por meio de poucos nomes e pequeno número de sinais convencionais, convenientemente combinados.

Divide-se portanto em duas partes: *numeração falada* e *numeração escrita*. A primeira trata da enunciação dos números por meio de pequeno número de nomes, a segunda, de sua representação, por meio de poucos sinais, combinados convenientemente.

Os sinais gráficos empregados na representação dos números chamam-se *algarismos*. *Exemplo*: o sinal 5.

Chama-se *sistema de numeração* ao conjunto de números formados segundo determinadas convenções.

Um sistema de numeração carateriza-se pela sua base, de que toma o nome. A *base* de um sistema de numeração é o número de algarismos empregados, neste sistema, para representar todos os números possíveis.

Dentre os sistemas de numeração, o que está universalmente adotado, é o *sistema decimal*, isto é, aquele cuja base é o número *dez*. Por esta razão só dêle nos ocuparemos a seguir.

NUMERAÇÃO FALADA

A unidade só recebe a denominação de *um*. Juntando a unidade a si mesma, isto é, um a um obtém-se o número *dois*; continuando a juntar a unidade ao último número formado, resultam os números: *três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove*.

Estes nove primeiros números são as *unidades simples* ou *unidades de primeira ordem*.

Juntando-se ao número nove uma unidade, resulta o número *dez*. No sistema decimal de numeração, convencionou-se que a coleção destas dez unidades simples forma uma unidade de ordem imediatamente superior, que recebeu a denominação de *dezena*. A dezena é, assim, a *unidade de segunda ordem* e vale dez unidades simples.

As dezenas formam-se como as unidades simples e temos: *uma dezena, duas dezenas, três dezenas... nove dezenas.* Mas o uso consagrou as seguintes denominações: *dez, vinte, trinta, quarenta, cincoenta, sessenta, setenta, oitenta, noventa.*

A expressão dos números compreendidos entre duas dezenas consecutivas, obtém-se juntando às palavras dez, vinte, trinta... noventa, os nomes dos nove primeiros números. E tem-se: *dez e um, dez e dois, dez e três, dez e quatro, dez e cinco, dezesseis, dezessete... vinte e um, vinte e dois... trinta e um, trinta e dois,* etc. O uso, porém, consagrou: *onze, doze, treze, quatorze, quinze,* em lugar de dez e um, dez e dois... dez e cinco.

Juntando-se a noventa e nove uma unidade, tem-se uma reunião de dez dezenas e que toma o nome de *cem.* Mas de acôrdo com a convenção, a reunião destas dez dezenas ou unidades de segunda ordem constitue uma nova unidade de ordem imediatamente superior, que tomou a denominação de *centena.* Portanto, a centena é a *unidade de terceira ordem* e *vale dez dezenas ou unidades de segunda ordem, cem unidades.*

Contam-se as centenas como as unidades.

O uso consagrou as denominações *cem, duzentos... novecentos,* em lugar de uma centena, duas centenas... nove centenas.

Para exprimir os números compreendidos entre duas centenas consecutivas, juntam-se às palavras cem, duzentos... novecentos, os nomes dos noventa

e nove primeiros números. E tem-se: *cento e um, cento e dois... duzentos e um, duzentos e dois...* e assim por diante até *novecentos e noventa e nove.*

Para exprimir os números maiores do que os considerados seria necessário empregar nomes diferentes para designar as novas ordens. Mas como simplificação, grupamos as *ordens* três a três e formamos as *classes.*

O conjunto das três primeiras ordens, *unidades simples, dezenas de unidades,* e *centenas de unidades* forma a *primeira classe* dos números ou *classe das unidades simples.* Juntando-se ao número novecentos e noventa e nove uma unidade, obtém-se o número *mil.* E' uma reunião de dez centenas e de acôrdo com a convenção a reunião dessas dez centenas ou unidades de terceira ordem forma uma unidade de ordem imediatamente superior, a que se chamou *milhar.* Assim, o milhar é a *unidade de quarta ordem* e *vale dez centenas, cem dezenas, mil unidades.*

Formam-se os milhares como as unidades simples, repetindo sucessivamente entre um número de mil e o seguinte, todos os números inferiores. Assim, tem-se: *um mil, dois mil... nove mil, dez mil... noventa e nove mil, cem mil...* até o número *novecentos e noventa e nove mil novecentos e noventa e nove unidades.*

Dez unidades da quarta ordem ou unidades de milhar formam uma *dezena de milhar* ou *unidade de quinta ordem;* dez dezenas de milhar ou unidades

de quinta ordem constituem uma *centena de milhar* ou *unidade de sexta ordem*. As três ordens, *unidades, dezenas e centenas de milhar*, constituem a *segunda classe* dos números ou *classe dos milhares*.

Novecentos e noventa e nove mil novecentos e noventa e nove unidades juntando um, obtém-se mil milhares ou *um milhão*. E' uma coleção de dez centenas de milhar, que, conforme a convenção, constituem uma unidade de ordem imediatamente superior. Portanto, o *milhão* é a *unidade de sétima ordem* e vale mil milhares, um milhão de unidades. Dez unidades de milhão formam *uma dezena de milhão* ou *unidade de oitava ordem*; dez dezenas de milhão constituem uma *centena de milhão* ou *unidade de nona ordem*. Estas três ordens, *unidades, dezenas, e centenas de milhão*, formam a *terceira classe* dos números ou *classe dos milhões*.

Da mesma maneira, dez unidades de bilhão constituem uma *dezena de bilhão* ou *unidade de décima ordem*; dez dezenas de bilhão formam uma *centena de bilhão* ou *unidade de décima primeira ordem*. As três ordens, *unidades, dezenas, e centenas de bilhão*, formam a *quarta classe* dos números ou *classe dos bilhões*. E assim por diante, para as classes dos *trilhões, quatrilhões*, etc..

Formam-se os milhões, bilhões, etc. como os milhares.

O quadro abaixo contém as classes formadas pelas doze primeiras ordens.

Primeira ordem : unidades segunda ordem : dezenas terceira ordem : centenas		de unidades . . .	primeira classe

quarta ordem : quinta ordem : sexta ordem :	unidades dezenas centenas	de milhar. . . .	segunda classe
sétima ordem : oitava ordem : nona ordem :	unidades dezenas centenas	de milhão . . .	terceira classe
décima ordem : décima primeira ordem : décima segunda ordem :	unidades dezenas centenas	de bilhão. . . .	quarta classe etc.

Observações. — De acôrdo com o que precede observa-se que se consegue dar nomes a todos os números por meio de um pequeno número de palavras, convenientemente combinadas, empregando um artifício e um princípio convencional.

1.ª As palavras empregadas são : *um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, cem, mil, milhão, bilhão, etc.*

2.ª O artifício empregado consiste em grupar as diversas *ordens*, três a três, para formar *classes de unidades*. Assim, temos *unidades, dezenas e centenas de unidades simples; unidades, dezenas e centenas de milhar; etc.*

3.º **Princípio convencional.** — *Dez unidades de uma ordem qualquer formam uma unidade de ordem imediatamente superior.*

Assim :

dez unidades simples	formam uma dezena ;
dez dezenas	formam uma centena ;
dez centenas	formam uma unidade de milhar ;
dez unidades de milhar	formam uma dezena de milhar ;
dez dezenas de milhar	formam uma centena de milhar ;
dez centenas de milhar	formam uma unidade de milhão ; etc.

NUMERAÇÃO ESCRITA

Na representação dos números empregam-se sòmente dez sinais gráficos (*algarismos*), que têm a forma seguinte:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Denominam-se respectivamente:

Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, zero.

Os nove primeiros algarismos representam os nove primeiros números e recebem, como vemos, os mesmos nomes.

Os nove primeiros algarismos bastam para representar unidades de qualquer ordem, pois cada uma delas pode ter de uma a nove unidades. Para isso é necessário que êsses sinais sejam convenientemente combinados, o que se conseguiu empregando o seguinte

Princípio fundamental. — *Todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades dez vêzes maiores do que se estivesse escrito no lugar dêsse outro.* Dessa maneira, partindo da direita, o primeiro algarismo representa unidades simples, o segundo dezenas, o terceiro centenas, o quarto unidades de milhar, e assim por diante.

Assim, o número *quinhentos e oitenta e sete*, que é formado de sete unidades simples, oito dezenas e cinco centenas, será escrito da seguinte maneira:

587

Mas, como veremos a seguir, para aplicar o princípio fundamental da numeração escrita, em todos os casos que se apresentam, teve-se necessidade de inventar um décimo algarismo — o símbolo *0* (zero) — que não representa valor algum, mas serve para *ocupar o lugar das ordens de unidades que faltam em um número, e determinar a colocação dos algarismos que lhe ficam à esquerda, de acôrdo com as ordens de unidades que devem representar.*

Assim, *quarenta* escreve-se: 40, empregando o *zero* para preencher a ordem das unidades; duzentos e nove, escreve-se: 209, com o *zero* para ocupar a ordem das dezenas. O símbolo 0 tornou-se indispensável para que o algarismo 4 representasse unidades de segunda ordem no número quarenta; tornou-se também imprescindível para que o algarismo 2 do número duzentos e nove pudesse representar unidades de terceira ordem.

Valores dos algarismos. — Dos dez *algarismos arábicos*, empregados na numeração escrita, os nove primeiros, isto é, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, recebem a denominação de *algarismos significativos*, pois cada um dêles representa um valor; o símbolo 0, que não representa valor algum, chama-se *algarismo insignificativo*.

De acôrdo com o princípio fundamental, cada algarismo significativo tem dois valores: *absoluto* e *relativo*.

Valor absoluto de um algarismo é o valor que êle representa quando está só.

Valor relativo ou *local* de um algarismo é o valor que êle representa, segundo a posição que ocupa no número.

Assim, no número 2485, o valor absoluto do algarismo 8 *é oito unidades*; o seu valor relativo *é oito dezenas*.

Regra para escrever os números. — *Para escrever um número inteiro, escrevem-se, da esquerda para a direita, os algarismos que representam as unidades das diversas ordens, começando pelas de ordem mais alta e substituindo por zeros as unidades das ordens que faltarem.*

Assim, o número *oito milhões quatrocentos e três mil e oito unidades*, escreve-se : 8403008.

Regra para ler os números. — *Para ler um número inteiro, divide-se em classes de três algarismos, a partir da direita, podendo a última da esquerda conter um, dois ou três algarismos ; em seguida, lê-se separadamente cada classe, da esquerda para a direita, dando-se a cada uma o nome que lhe compete.*

Assim, lê-se o número 4.508.072 como segue : *quatro milhões quinhentos e oito mil e setenta e duas unidades.*

Observações. — 1.ª) *O valor de um número inteiro não se altera colocando-se um ou mais zeros à sua esquerda.*

Seja o número 27. Colocando-se à sua esquerda um zero, por exemplo, tem-se 027, cujos algarismos têm o mesmo valor relativo que os do número dado.

2.ª) *Colocando-se um, dois, três, etc. zeros à direita de um número inteiro, obtém-se um número dez, cem, mil, etc. vêzes maior.*

Assim :

150 é dez vêzes maior que 15
1500 é cem „ „ „ 15
15000 é mil „ „ „ 15
etc.

3.ª) Os números que se representam com um único algarismo denominam-se *números simples*. *Ex.* : 2, 5, 8, etc. Os números cuja representação exige mais de um algarismo chamam-se *compostos*. *Ex.* : 28, 425, 302, etc.

Exercícios.

Escrever com algarismos os seguintes números :

1. Dois, quatro, cinco, sete, oito, um, três, nove.

2. Vinte e cinco, trinta e oito, quarenta e dois, cincoenta e seis.

3. Sessenta e sete, setenta e um, oitenta e oito, noventa.

4. Cento e seis, cento e quinze, cento e vinte e cinco, cento e quarenta.

5. Duzentos e oito, trezentos e cincoenta e dois, quatrocentos, quatrocentos e oito.

6. Quinhentos e cincoenta e quatro, seiscentos, setecentos e vinte e um.

7. Oitocentos e trinta e nove, novecentos e sete, novecentos e quarenta.

8. Mil e dois, mil e vinte e cinco, mil quatrocentos e oitenta e sete.

9. Dois mil e oito, três mil e cincoenta e nove, cinco mil cento e trinta.

10. Oito mil e cincoenta, dez mil e um, quinze mil cento e vinte e oito.

11. Vinte e cinco mil duzentos e vinte e sete, cincoenta e oito mil e dezenove.

12. Trezentos e vinte e cinco mil oitocentos e sete, quinhentos mil e noventa.

13. Quatrocentos mil e três, quinhentos mil e oito, dois milhões duzentos mil e trinta e dois.

14. Três milhões três mil e três, cinco milhões cento e vinte e cinco mil.

15. Oito milhões cinco mil e vinte e oito, cento e doze milhões quinze mil e seis.

16. Quinhentos e oitenta e quatro milhões cento e oito mil duzentos e cincoenta e quatro, trezentos e um milhões mil e nove.

17. Um bilhão dois milhões mil e dezenove, cinco bilhões quatrocentos e vinte e oito mil e sete.

18. Doze bilhões oito milhões cento e dois mil quatrocentos e quatro, vinte e cinco bilhões quatro milhões e doze.

19. Cinco trilhões quinze bilhões quatro milhões oitenta e nove mil e vinte e cinco.

20. Doze trilhões cento e vinte e cinco milhões e sete.

Ler os seguintes números:

1. 3, 6, 8, 4, 2, 10, 15, 18, 21, 27, 30, 36, 40, 45, 52.

2. 58, 60, 64, 70, 72, 78, 81, 88, 90, 92, 98.

3. 100, 205, 210, 318, 435, 563, 621, 716, 843, 902, 908, 963, 981.

4. 1012, 2002, 3151, 4039, 5687, 6403, 7508, 8012, 9007, 10005.

5. 28015, 37000, 47456, 58300, 77007, 77077, 77777, 100004.

6. 200058, 308009, 400500, 524318, 674006, 4000058, 6070029.

7. 2000004, 3008015, 5007148, 8020945, 9054206, 68456789.

8. 89453217, 94005002, 90005460, 200006004, 530008009, 608506594.

9. 960054721, 954823105, 555005005, 555000555, 50555555, 500055005.

10. 2004500308, 4504865709, 8375200005, 1342576908, 12345678901.

NUMERAÇÃO ROMANA

Os romanos empregavam, em sua numeração, como algarismos, sete letras maiúsculas do alfabeto latino, com as quais representavam os números usando pequeno número de regras.

A representação dos números por meio de algarismos romanos não apresenta vantagens práticas; contudo é utilizada em certos casos: na designação dos capítulos de um livro, na inscrição de datas, nos mostradores dos relógios, na cronologia dos reis, dos papas, etc.

As sete letras maiúsculas, empregadas como *algarismos romanos*, e os seus respectivos valores, são:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Os algarismos romanos combinam-se de acôrdo com as *regras* seguintes, para representar os números:

1.ª) *Se letras semelhantes estão escritas umas em seguida às outras, somam-se os seus valores. Exemplos:*

III	XX	CC	MM
3	20	200	2000

2.ª) *Se uma letra está escrita à esquerda de outra de valor maior, subtrai-se o valor da primeira do da segunda. Exemplos:*

IV	IX	XL	CD	CM
4	9	40	400	900

3.ª) *O valor de uma letra escrita à direita de outra de valor maior, soma-se ao valor dessa outra. Exemplos :*

XI	LX	DC	MC
11	60	600	1100

4.ª) *Se uma letra colocada entre duas outras, tem valor menor do que estas, subtrai-se do valor da que lhe fica à direita e soma-se o resto ao valor da que lhe fica à esquerda. Exemplos :*

XIV	CXL	CXC
14	140	190

5.ª) *Para tornar o valor de um número, representado em algarismos romanos, mil, um milhão, etc. de vêzes maior coloca-se, um, dois, etc. traços horizontais sôbre êle. Exemplos :*

XVI	$\overline{XVI}$	XII	$\overline{\overline{XII}}$
16	16000	12	12000000

Observação. — Dos sete caracteres empregados na numeração romana, sòmente quatro podem ser repetidos no mesmo número, mas até três vêzes no máximo. São :

I, X, C, M

Os outros três algarismos romanos V, L e D, nunca se repetem no mesmo número.

Exercícios.

Representar com algarismos romanos os números seguintes :

3 – 5 – 8 – 9 – 10 – 12 – 15 – 17 – 19 – 25 – 27 – 37 – 42 – 53 72 – 84 – 96 – 103 – 115 – 132 – 183 – 215 – 342 – 718 – 863 974 – 999 – 1600 – 1720 – 1782 – 1823 – 1824 – 1889 – 1920 2350 – 15452 – 128326.

Representar com algarismos arábicos os seguintes números :

III – VII – XIII – XV – XVI – XIX – XXXIV – XLI – LIX – LXIV – LXXXVIII – XC – XCIV – CCC – CCCXVIII – D – CDXLV – DLVIII – DCI – DCCLXXVI – CMII – MCC – MD – MDCXIV – MDCCCLXXIX – MDCCXL – MCMV – MCMXXIV – $\overline{XII}$DLXVI – MMMCCXCIV – $\overline{CXXXV}$DXIV.

CAPÍTULO II

Operações sôbre os números inteiros

Operações são as diversas maneiras de compor e decompor os números.

Dividem-se, pois, em operações de *composição* (adição, multiplicação e potenciação), e operações de *decomposição* (subtração, divisão e radiciação).

Dessas seis operações, a adição, subtração, multiplicação e divisão são denominadas *fundamentais*, pois que nelas recaem tôdas as outras.

Principais sinais. — Os principais sinais empregados em aritmética são:

O sinal de *adição* (+): lê-se *mais*.
Ex.: $5 + 4$ lê-se: 5 mais 4.

O sinal de *subtração* (—): lê-se *menos*.
Ex.: $7 - 3$ lê-se: 7 menos 3.

O sinal de *multiplicação* (×): lê-se *multiplicado por*.
Ex.: 3×8 lê-se: 3 multiplicado por 8.

O sinal de *divisão* (÷): lê-se *dividido por*.
Ex.: $15 \div 5$ lê-se: 15 dividido por 5.

O sinal de *igualdade* (=): lê-se *igual a*. (1)
Ex.: $11 + 6 = 17$, lê-se: 11 mais 6 igual a 17.

O sinal > lê-se *maior do que*.
Ex.: $5 + 2 > 4$; lê-se: 5 mais 2 maior do que 4.

O sinal < lê-se *menor do que*.
Ex.: $4 + 8 < 13 + 7$; lê-se: 4 mais 8 menor do que 13 mais 7.

Os dois últimos são sinais de *desigualdade*.

Problema. — Chama-se *problema* a tôda questão a resolver. Em aritmética, *problema* é uma questão em que se procura determinar um ou mais números desconhecidos por meio de outros números dados. *Ex.*: Sabendo que um quilo de café custa 2$600, determinar o custo de 155 quilos.

Resolver um problema é determinar os números desconhecidos por meio dos números dados. Na resolução de um problema têm-se duas partes: a *solução* e o *cálculo*.

Solução de um problema é a indicação das operações que se devem realizar.

Cálculo é a execução das operações indicadas na solução.

ADIÇÃO

Adição é a operação que tem por fim determinar um número que reune em si tôdas as unidades contidas em dois ou mais números dados.

(1) A expressão escrita à esquerda do sinal = chama-se *primeiro membro*, a que se acha à direita, *segundo membro* da igualdade.

Para indicar a adição emprega-se o sinal +, que se lê: *mais*.

Os números dados para somar chamam-se *parcelas* ou *termos* da adição; o resultado obtido tem o nome de *soma* ou *total*.

Exemplo:

$$4 + 7 = 11,$$

4 e 7 são as *parcelas* e 11, a *soma*.

Na adição de números inteiros, podemos considerar dois casos:

1.° *Adição de dois números simples*.
2.° *Adição de números quaisquer*.

1.° caso. — Para somar dois números simples, junta-se sucessivamente a um dêles cada uma das unidades que formam o outro.

Assim, para somar 8 e 3, juntam-se ao número 8, uma a uma, as unidades que constituem o número 3. Diz-se 8 mais 1, 9; mais 1, 10; mais 1, 11. Assim, a soma dos números dados é 11.

Na prática, opera-se com mais rapidez e facilidade guardando de memória os resultados das adições de dois números simples quaisquer.

Os resultados podem ser obtidos pela seguinte tabuada de adição:

TABUADA DE ADIÇÃO

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Para organizar esta tabuada, escrevem-se todos os números inteiros de 0 a 9, na primeira linha horizontal. Obtêm-se os números da segunda linha horizontal, juntando-se uma unidade aos números da primeira. E assim se prossegue até ter escrito dez linhas horizontais consecutivas.

Para se achar na tabuada a soma de dois números simples, procura-se um dêles na primeira linha horizontal e o outro na primeira linha vertical; no encontro das duas linhas está o resultado procurado. Na tabela da página anterior está indicado o modo de se obter a soma dos números 4 e 7.

2.º caso. — Para somar dois ou mais números quaisquer, emprega-se a seguinte

Regra. — *Escrevem-se as parcelas dadas, umas debaixo das outras, de modo que as unidades da mesma ordem fiquem na mesma linha vertical e traça-se por baixo delas uma linha horizontal. Somam-se, primeiramente, as unidades simples; se a soma não exceder a nove, escreve-se o total como se obtém; se passar de nove escrevem-se sòmente as unidades e reservam-se as dezenas para reuní-las às da coluna seguinte. Assim se prossegue com tôdas as outras colunas, até chegar à última da esquerda, debaixo da qual se escreve a soma tal qual se acha.*

Exemplo: Somemos os números 54, 4783 e 8472.

$$\begin{array}{r} 54 \\ 4783 \\ 8472 \\ \hline 13309 \end{array}$$

Dispõem-se os números dados conforme ficou indicado na regra e diz-se: 4 unidades e 3 unidades são 7, e 2 são 9; escreve-se o número 9 debaixo das unidades; 5 dezenas e 8 dezenas são 13 dezenas, e 7 são 20 dezenas; escreve-se 0 debaixo das dezenas e as vinte dezenas ou duas centenas acrescentam-se à coluna seguinte; 2 centenas de reserva e 7 centenas são 9, e 4 são 13; escreve-se 3 debaixo das centenas e tem-se 1 de reserva, que se acrescenta à coluna seguinte; 1 unidade de milhar e 4 são 5 e 8 são 13 unidades de milhar; escreve-se 13. A soma é 13309.

Prova. — Chama-se *prova* a uma operação que se realiza para verificar a exatidão do resultado de outra já efetuada. A prova não oferece completa segurança sôbre a exatidão da operação que se verifica, mas sòmente uma probabilidade de que a operação dada está certa.

Na adição podemos empregar as provas seguintes:

1.ª) Consiste em efetuar a adição em sentido inverso, isto é, debaixo para cima, se a operação foi efetuada de cima para baixo, e viceversa.

2.ª Prova *dos 9, dos 2*, etc.

Observação. — Em muitos casos, a adição pode ser realizada abreviadamente, com auxílio do cálculo mental.

Exercícios.

Efetuar mentalmente as seguintes adições:

1. 8+15+4 R. 27
2. 18+25+7 R. 50
3. 27+28+12 R. 67
4. 35+22+37 R. 94
5. 43+52+31 R. 126
6. 58+62+35+21 R. 176
7. 56+72+64+23 R. 215
8. 105+130+40 R. 275
9. 240+150+47 R. 437
10. 304+120+102 R. 526

Efetuar as seguintes adições:

1. 47+72+35 R. 154
2. 84+322+407 R. 813
3. 302+547+628+700 R. 2177
4. 858+972+1241+725 R. 3796
5. 1220+3852+627+842 R. 6541
6. 2160+3782+2140+24 R. 8106

7. 3811+4522+2338+894 R. 11565
8. 4507+3084+158+12197 R. 19946
9. 15777+20341+13425+2004 R. 51547
10. 47524+6725+4001+128007+5402 R. 191659

Problemas.

1. Um auto fez uma viagem em 5 dias: no 1.º dia fez 189 km., no 2.º 218, no 3.º 236, no 4.º 97, e no 5.º 178. Que distância percorreu em tôda a viagem?

R. *918km.*

2. Que importância junta em 4 meses uma pessoa que guarda no 1.º mês 78$400, no 2.º 129$000, no 3.º 187$500 e no 4.º 219$500?

R. *614$400.*

3. Uma senhora saíu a fazer compras, sem saber que importância levava na bolsa; voltando a casa queria saber quanto gastou, lembrando-se que comprou frutas na importância de 7$800, fazendas no valor de 78$600, flores no de 12$000 e brinquedos por 27$500. Quanto gastou?

R. *125$900.*

4. Uma pessoa nascida no ano de 1887 em que ano se casou, sabendo-se que realizou êsse ato com a idade de 28 anos?

R. *1915.*

5. Um homem nasceu em 1883, casou-se com a idade de 25 anos, e teve 3 filhos: o 1.º 2 anos depois do casamento, o 2.º 3 anos depois do 1.º e o 3.º 4 anos depois do 2.º filho. Em que ano o 3.º filho terá 12 anos de idade, e nessa data qual será a idade do pai e dos outros irmãos?

R. *Em 1929; o pai terá 46 anos; o 1.º filho, 19; e o 2.º, 16.*

6. Tendo-se comprado um terreno por 1:485$000 e querendo-se ganhar 780$000, por quanto se deve vendê-lo?

R. *2:265$000.*

7. Tendo-se vendido um terreno por 7:895$000 com um prejuízo de 2:729$000, por quanto se comprou?

R. *10:624$000.*

8. Um aluno, ao fazer uma adição, esqueceu-se das reservas, que na casa das unidades eram 2, na das dezenas 1 e na das centenas 2, tendo achado para resultado o número 25532. Qual é o verdadeiro resultado e qual foi o valor do êrro cometido?

R. *27652; o êrro foi de 2120.*

9. Um trem partiu da estação *A* às 18 horas do dia 15 de setembro. Em que dia e a que horas êle chegou à estação *B*, tendo gasto na viagem exatamente 85 horas?

R. *Dia 19, às 7 horas da manhã.*

10. Uma pessoa iniciou uma excursão no dia 27 de setembro de 1935 e terminou-a no dia 15 de agôsto de 1936. Quantos dias durou essa excursão?

R. *324 dias.*

11. Na primeira semana do mês, um indivíduo colocou 70$000 na Caixa Econômica; continuou depositando, em cada semana seguinte, 10$000 mais do que na anterior. Quanto depositou no fim do mês?

R. *340$000.*

12. A superfície do Estado do Paraná é de 200000km² aproximadamente. Qual é a superfície do Estado de São Paulo, sabendo-se que êste mede 47300km² mais do que aquele?

R. *247300 km².*

13. Entre as estrelas visíveis a ôlho nu contam-se 20 de 1.ª grandeza, 65 de 2.ª, 190 de 3.ª, 425 de 4.ª, 1100 de 5.ª e 3200 de 6.ª. Quantas são as estrelas que se vêem a ôlho nu?

R. *5000 estrelas.*

14. Em quantos milhões de habitantes calcula-se a população do globo terrestre, sabendo-se que a da Ásia é avaliada em 1100000000, a da Europa 506000000, a da América 250000000, a da África 150000000 e da Oceania 10000000?

R. *2016000000 de habitantes.*

15. Qual é a superfície aproximada do globo terrestre, sabendo-se que a da Ásia avalia-se em 44000000 de km², a da América em 42000000, a da África em 29000000, a da Europa em 10000000, a da Oceania em 9000000 e, finalmente, a da Antártida em 5000000?

R. *139000000km².*

SUBTRAÇÃO

Subtração é a operação que tem por fim, sendo dadas a soma de duas parcelas e uma delas, determinar a outra.

Para indicar a subtração, emprega-se o sinal —, que se lê: *menos.*

Os números dados na subtração chamam-se *termos:* o maior denomina-se *minuendo* e o menor *subtraendo.* O resultado da subtração chama-se *resto, excesso* ou *diferença.*

Exemplo:

$$9 - 5 = 4,$$

9 e 5 são os *termos*, 9 é o *minuendo*, 5 o *subtraendo* e 4 o *resto, excesso,* ou *diferença.*

Na subtração de números inteiros podemos considerar dois casos:

1.°) *Subtração de um número simples de outro simples, ou de um composto resultando um número simples.*

2.°) *Subtração de um número simples de um composto, resultando um número composto ou subtração de dois números compostos quaisquer.*

1.° caso. — Tira-se sucessivamente do minuendo cada uma das unidades que constituem o subtraendo.

Assim, para subtrair 3 de 9, tira-se do número 9, uma a uma, as unidades que formam o número 3. Diz-se 9 menos 1, 8; menos 1, 7; menos 1, 6. Portanto, o resultado da subtração proposta é 6.

Na prática, opera-se com mais rapidez e facilidade guardando os resultados dessas subtrações de memória.

Êsses resultados podem ser obtidos pela *tabuada da adição*. Para se achar o resultado da subtração de dois números na tabuada, procura-se o subtraendo na primeira linha vertical, por exemplo, segue-se para a direita até encontrar o minuendo; na extremidade superior da coluna em que está o minuendo encontra-se o resto.

2.° caso. — Neste caso, emprega-se a seguinte

Regra. — *Escreve-se o subtraendo debaixo do minuendo, de modo que as unidades da mesma ordem fiquem na mesma coluna vertical, e traça-se por baixo dos termos uma linha horizontal. A partir da direita, subtraem-se sucessivamente as unidades das diversas ordens do subtraendo das unidades correspondentes do minuendo. Se o número de unidades de uma certa ordem do subtraendo for maior do que o número de unidades correspondentes do minuendo, juntam-se a êste*

dez unidades da mesma ordem, efetua-se a subtração, e considera-se a ordem do minuendo situada imediatamente à esquerda, diminuída de uma unidade.

Exemplo: Seja subtrair o número 2586 de 7349.

```
  2 14
7 3 4 9
2 5 8 6
-------
4 7 6 3
```

Escrevem-se os dois números, conforme indica a regra, e começa-se a operação da direita para a esquerda, dizendo-se: 9 menos 6, 3; escreve-se 3 debaixo das unidades; 4 menos 8, não é possível. Somam-se 10 a 4 e diz-se: 14 menos 8, 6; escreve-se 6 debaixo das dezenas. A ordem das centenas do minuendo fica diminuída de 1; diz-se, depois: 2 menos 5 não é possível; acrescentam-se 10 a 2 e de 12 tiram-se 5, e tem-se 7; escreve-se o algarismo 7 debaixo das centenas. A ordem das unidades de milhar do minuendo ficou desfalcada de uma unidade, e diz-se: 6 menos 2, 4; escreve-se 4 debaixo das unidades de milhar.

Provas. — Na subtração podemos empregar as seguintes provas:

1.ª) Consiste em somar o subtraendo com o resto. Se essa soma for igual ao minuendo, admite-se que a operação dada está certa.

2.ª) Prova *dos 9, dos 2,* etc.

Observação. — Em certos casos, a subtração pode ser feita abreviadamente, empregando-se o cálculo mental.

EXERCÍCIOS.

Efetuar mentalmente as seguintes subtrações:

1. 25 - 12	R. 13	6. 92 - 27	R. 65
2. 58 - 38	R. 20	7. 143 - 15	R. 128
3. 65 - 41	R. 24	8. 154 - 75	R. 79
4. 72 - 17	R. 55	9. 871 - 182	R. 689
5. 81 - 35	R. 46	10. 1106 - 807	R. 299

Efetuar as subtrações seguintes:

1. 2527 - 472	R. 2055	6. 28702 - 12527	R. 16175
2. 2032 - 786	R. 1246	7. 150002 - 15555	R. 134447
3. 2517 - 931	R. 1586	8. 3587005 - 296542	R. 3290463
4. 5252 - 894	R. 4358	9. 4200035 - 888899	R. 3311136
5. 14007 - 8952	R. 5055	10. 20405678 - 4906389	R. 15499289

Calcular o valor das expressões seguintes:

1. $7+11-3+8-6-9$ R. 8
2. $5+9-4-3-1+15-10+7$ R. 18
3. $15+12-9-24+18-3+19-25$ R. 3
4. $32+5+18-54-32+42+27-8$ R. 30
5. $17+82-(15+3+8)-4+15$ R. 84
6. $2-15-(7+8-4)+16+54$ R. 46
7. $18+32+7+(4-8+35)-9-35$ R. 44
8. $182-(50+18+72-25)+12-68-(4+27)+38$ R. 18
9. $524+325-(427+125-89)+127-(15+72)$ R. 426
10. $3425-(1254+825+27)-425-(127+200-300)$ R. 867

PROBLEMAS.

1. Quantos anos viveu D. Pedro II, sabendo-se que êle nasceu em 1825 e faleceu em 1891?

R. *66 anos.*

2. Com a idade de 32 anos um pai teve um filho. Que idade tinha o filho quando o pai tinha 50 anos?

R. *18 anos.*

3. Dois irmãos têm respectivamente 23 anos e 31 anos de idade. Que idade terá o mais moço quando o mais velho tiver 40 anos?

R. *32 anos.*

4. Comprei uma casa por 87:500$000 e vendí por 110:000$000. Que lucro tive no negócio?

R. *22:500$000.*

5. Vendí por 72:500$000 uma casa que comprei por 80:000$000. Que prejuízo tive no negócio?

R. *7:500$000.*

6. Vendí uma casa por 25:000$000 ganhando no negócio 7:850$000. Por quanto comprei?

R. *17:150$000*

7. Perdí na venda de uma casa que comprei por 30:000$000, 8:800$000. Por quanto vendí?

R. *21:200$000.*

8. Um aluno ao fazer uma adição, tomou sempre nas reservas de cada coluna, uma unidade a mais do que devia, repetindo êsse engano na casa das unidades, das dezenas, das centenas e dos milhares, tendo achado o resultado 110015. Qual será o verdadeiro resultado?

R. *98905.*

9. Um trem partiu da estação *A* às 7 horas da manhã e chegou à estação *B* às 2 horas da madrugada do dia seguinte. Quantas horas viajou?

R. *19 horas.*

10. Eu tinha a importância de 2:000$000 no bolso, e depois de fazer diversos pagamentos fiquei ainda com 821$000; qual foi a importância total dos pagamentos efetuados?

R. *1:179$000.*

11. A diferença entre dois números é 208 e o maior dêles, 315. Qual é o menor? R. *107*.

12. A soma de dois números é 18526 e um dêles, 3084. Qual é o outro? R. *15442*.

13. O ponto culminante da Terra é o monte Everest, situado na cordilheira do Himalaia (Ásia), com 8840 metros, e o pico Bandeira, situado na serra da Chibata (Minas Gerais), com 2950 metros, é o ponto mais alto do Brasil. Qual é a diferença de altura entre êsses dois pontos?

R. *5890 metros*.

14. Os 371000000 km² que representam a superfície das águas que cobrem o globo terrestre estão assim distribuídos: 187000000 para o Pacífico, 90000000 para o Atlântico, 70000000 para o Índico, 14000000 para o Glacial Antártico e o restante para o Glacial Ártico. Qual é a superfície dêste último?

R. *10000000 km²*.

15. A população do Brasil Meridional, que compreende os Estados de São Paulo, Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul, é calculada em 12800000 habitantes. Qual é a população do Estado do Paraná, sabendo-se que as dos outros três são respectivamente de 7300000, 1100000, e 3300000 habitantes?

R. *1100000 habitantes*.

MULTIPLICAÇÃO

Multiplicação é a operação que tem por fim, dados dois números, determinar um terceiro, que se forme do primeiro como o segundo se formou da unidade.

Para indicar a multiplicação, emprega-se o sinal ×, que se lê: *multiplicado por* ou *vêzes*.

O resultado da operação chama-se *produto* e os números dados para multiplicar, *fatores*: o primeiro, elemento de formação do produto, é o *multiplicando*; o fator que mostra como o produto se forma do multiplicando, chama-se *multiplicador*.

Exemplo:

$$7 \times 8 = 56$$

7 e 8 são os *fatores*, 7 é o *multiplicando*, 8 o *multiplicador* e 56 é o *produto*.

No caso em que o multiplicador é número inteiro, a multiplicação também se define:

Multiplicação é a operação que tem por fim repetir um número tantas vêzes quantas são as unidades do outro.

Daí se conclue que a multiplicação é um caso particular da adição, isto é, uma soma de tantas parcelas iguais ao multiplicando, quantas são as unidades do multiplicador. Assim,

$$4 \times 5 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$$

Na multiplicação de números inteiros, consideram-se três casos:

1.°) *Multiplicação de números simples.*

2.°) *Multiplicação de um número composto por um simples.*

3.°) *Multiplicação de números compostos.*

1.° caso. — Para multiplicar dois números simples, basta tomar a soma de tantas parcelas iguais ao multiplicando quantas são as unidades do multiplicador.

Assim, para multiplicar 5 por 7, somam-se 7 parcelas iguais a 5 e tem-se

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 35$$

Na prática, porém, tornam-se as operações mais rápidas e fáceis retendo de memória os resultados das multiplicações de dois números simples quaisquer. Aliás, êsses resultados podem ser obtidos na *tabuada de multiplicar* ou de Pitágoras.

TABUADA DE MULTIPLICAR

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Para construir essa tabela escrevem-se todos os números inteiros de 1 a 9, na primeira linha horizontal. Obtém-se, em seguida, a segunda linha horizontal, somando cada número da primeira a si mesmo; forma-se, depois, a terceira linha horizontal somando os números da segunda com os correspondentes da primeira; obtém-se a quarta linha horizontal, somando-se os números da terceira com os correspondentes da primeira e assim por diante, prosseguindo-se deste modo até a formação da nona linha.

Para se encontrar na tabela o produto de dois números simples, procura-se um dos fatores na primeira linha horizontal e o outro na primeira linha vertical; no encontro das duas linhas está o resultado. Na tabuada da página anterior indicou-se o modo de obter o produto dos números 5 e 8

2.º caso. — Na multiplicação de um número composto por um simples, emprega-se a seguinte

Regra. — *Escreve-se o multiplicando e por baixo dêle o multiplicador, que se sublinha para separar os fatores do produto; depois, começando da direita para a esquerda, multiplicam-se as unidades de cada ordem do multiplicando pelo multiplicador; se de algum dêsses produtos resultarem unidades de ordem superior, essas serão reservadas para serem reunidas às da ordem correspondente, até o último produto à esquerda, que se escreve como se obtém.*

Exemplo: Seja multiplicar o número 4329 por 5.

$$\begin{array}{r} 4329 \\ 5 \\ \hline 21645 \end{array}$$

Escrevem-se os fatores, um debaixo do outro, sublinha-se e começa-se a operação pela direita, dizendo-se: 5 vêzes 9 unidades, 45. Escreve-se 5 debaixo das unidades e retém-se 4 dezenas. 5 vêzes 2 dezenas, 10; com 4 dezenas de reserva, 14. Escreve-se o algarismo 4 debaixo das dezenas e retém-se 1 centena. 5 vêzes 3 centenas, 15; com 1 centena de reserva, 16. Escreve-se 6 debaixo das centenas e retém-se 1 unidade de milhar. 5 vêzes 4 unidades de milhar 20; com 1 unidade de milhar de reserva, 21. Escreve-se o 1 debaixo das unidades de milhar e o 2 à esquerda dêsse algarismo.

3.° caso. — A multiplicação de dois números compostos, efetua-se com a seguinte

Regra. — *Escreve-se o multiplicando e por baixo dêle o multiplicador, que se sublinha. Em seguida multiplicam-se sucessivamente as unidades de cada ordem do multiplicando, a partir da direita, pelas unidades de cada ordem do multiplicador, e escreve-se cada produto parcial de modo que o primeiro algarismo da direita fique na mesma coluna que o algarismo do multiplicador que serviu para formá-lo. Somam-se os produtos parciais obtidos e tem-se o produto total.*

Exemplo: Seja multiplicar 458 por 275.

$$\begin{array}{r} 458 \\ \underline{275} \\ 2290 \\ 3206 \\ \underline{916} \\ 125950 \end{array}$$

Escrevem-se os fatores, segundo indica a regra, e multiplica-se todo o multiplicando pelo número 5 (unidades do multiplicador) e obtém-se o primeiro produto parcial, isto é, 2290. Em seguida, multiplica-se o multiplicando pelo número 7 (dezenas do multiplicador) e tem-se o segundo produto parcial, isto é, 3206; escreve-se êste produto debaixo do primeiro, de modo que o primeiro algarismo da direita 6 fique na coluna do algarismo 7 do multiplicador que serviu para formá-lo. Multiplica-se, enfim, o multiplicando pelo número 2 (centenas do multiplicador) e resulta o terceiro produto parcial 916; êste se escreve debaixo do segundo produto parcial, de modo que o primeiro algarismo da direita 6 fique na mesma coluna do algarismo 2 do multiplicador. Somando-se os três produtos parciais obtidos resulta o produto total 125950.

Casos particulares. — 1.°) *Para multiplicar um número qualquer por outro formado pela unidade seguida de zeros, escreve-se à direita do primeiro o mesmo número de zeros que existem no segundo.*

Exemplo: Seja multiplicar 273 por 1000.

Escreve-se o número 273 e acrescentam-se três zeros à sua direita; tem-se o produto procurado 273000.

2.°) *Para multiplicar dois números, quando um ou ambos são formados por algarismos significativos acompanhados de zeros, multiplicam-se os números constituídos pelos algarismos significativos e acrescentam-se à direita do produto obtido tantos zeros quantos se encontram à direita de um ou de ambos os fatores.*

Exemplos: Multiplicar 7200 por 3.

1.°) Multiplica-se 72 por 3 e acha-se o produto 216; escrevendo-se dois zeros à direita dêle, tem-se o produto procurado 21600.

2.°) Multiplicar 321 por 600.

Multiplica-se 321 por 6 e à direita do produto obtido 1926 escrevem-se dois zeros. O produto pedido será 192600.

3.°) Multiplicar 1280 por 300.

Efetua-se a multiplicação de 128 por 3 e acha-se 384; à direita dêsse produto acrescentam-se três zeros e obtém-se o produto procurado 384000.

3.°) *Havendo zeros colocados entre dois algarismos significativos do multiplicador, efetua-se a multiplicação não levando em conta os zeros, pois os produtos parciais correspondentes são nulos; deve-se, porém, ter o cuidado de colocar os algarismos dos produtos parciais seguintes na ordem competente.*

Exemplo: Seja multiplicar 3284 por 207.

```
  3284
   207
 -----
 22988
6568
------
679788
```

Colocam-se os fatores, conforme a regra indicada. Em seguida, multiplica-se 3284 por 7 e escreve-se o produto parcial obtido 22988. Depois, sem levar em conta o 0, multiplica-se 3284 por 2 e resulta o produto parcial 6568, que se escreve debaixo do primeiro tendo o cuidado de colocar o algarismo da direita 8 na coluna que lhe compete, isto é, na das centenas. Somam-se finalmente os produtos parciais 22988 e 6568 e tem-se o produto total 679788.

Provas. — Na multiplicação empregam-se as seguintes provas:

1.ª) Consiste em inverter a ordem dos fatores e efetuar novamente a multiplicação. Se o resultado obtido for igual ao que resultou da primeira operação pode-se admitir a exatidão desta.

2.ª) Prova *dos 9, dos 2*, etc.

Observação. — Em certos casos, o produto de dois números pode ser obtido ràpidamente pelo emprêgo do cálculo mental.

EXERCÍCIOS.

Efetuar mentalmente as seguintes multiplicações:

1.	35×20	R. 700	6.	425×40	R. 17000
2.	30×11	R. 330	7.	527×20	R. 10540
3.	41×15	R. 615	8.	856×50	R. 42800
4.	105×8	R. 840	9.	1250×2	R. 2500
5.	219×30	R. 6570	10.	2475×8	R. 19800

Efetuar as seguintes multiplicações:

1.	782×9	R. 7038
2.	954×35	R. 33390
3.	1502×78	R. 117156
4.	15499×69	R. 1069431
5.	41007×1422	R. 58311954
6.	7×9×25	R. 1575
7.	8×35×41	R. 11480
8.	4×12×19×38	R. 34656
9.	9×15×35×42	R. 198450
10.	15×18×49×93×207	R. 254690730

Calcular o valor das expressões seguintes (1):

1. $4\times5+7\times9-3\times4\times2+15$ — R. 74
2. $9\times3-5\times3\times8+6\times9\times2+5\times7$ — R. 50
3. $15\times4\times2-7\times2\times3+5\times4\times12-6\times4\times3\times2$ — R. 174

(1) Além dos sinais de *relação* e das *operações*, empregam-se os chamados sinais de *coleção*. São: o *parênteses* ( ), o *colchete* [ ], e a *chave* { }.

4. (5+4)×3+7×3−(8−3)×2×3 R. 18
5. (5+9−2)×15−8×4−5×7+(3+2−1)×4 R. 9
6. 15+(7−3+8−3)×7−(9×4+6−8×3+1) R. 59
7. 12+9×(5−3+8−4)−(9×3−2)×4×2+35×6 R. 76
8. 3×2−7×(4−8+7)+5×(3×4+8−3×2) R. 55
9. 5×(2+4)+(9−5×3+4×3)−(3+8)×(7−5) R. 14
10. (2+3)×(7−3)+8×5−7−(4+5)×(5−3)×2 R. 17

PROBLEMAS.

1. Quanto custa uma peça de 86 metros de fazenda a 8$305 o metro?
R. *714$230.*

2. Quanto custa uma partida de 350 peças de linho, tendo cada peça 35 metros e custando 8$500 o metro?
R. *104:125$000.*

3. Qual é o preço de um terreno urbano que tem 208 metros de frente ao preço de 805$000 cada metro de frente (não considerando o fundo)?
R. *167:440$000.*

4. Quanto custa um terreno agrário tendo 18405 metros quadrados de superfície à razão de 890 réis cada metro quadrado?
R. *16:380$450.*

5. Em um pomar de forma retangular acham-se plantadas 167 filas de árvores frutíferas, tendo cada fila 306 árvores. Qual é o número total de árvores existentes no pomar?
R. *51102 árvores.*

6. Quanto se gastou para ladrilhar um corredor de forma retangular, sabendo-se que cada ladrilho assentado saíu por 1$200 e que no sentido de largura há 15 ladrilhos e no de comprimento 101 ladrilhos exatamente?
R. *1:818$000.*

7. Quantas vêzes se pode aplicar sôbre um terreno retangular, de 25 metros de frente e 38 metros de fundo, uma prancha de forma quadrada, tendo 1 metro de lado?
R. *950 vêzes.*

8. Sabendo-se que um dia tem 24 horas, que uma hora tem 60 minutos e um minuto tem 60 segundos, calcular quantos segundos tem um dia?
R. *86400 segundos.*

9. Quantas voltas dá durante um dia inteiro uma roda que se move contínua e constantemente dando 3 voltas por segundo?
R. *259200 voltas.*

10. Que distância percorrerá um veículo em 5 horas de viagem ininterrupta, sabendo-se que a sua roda tem de circunferência 2 metros e que dá 3 voltas em cada segundo durante a viagem?
R. *108000 metros.*

11. Quantos litros de oxigênio encontram-se em 1800 litros de ar, sabendo-se que em 100 litros de ar há aproximadamente 21 litros daquele gás?
R. *378 litros.*

12. Um indivíduo normal e adulto inspira 8 litros de ar por minuto. Quantos litros de ar inspira durante o dia?
R. *11520 litros.*

13. No ar, o som percorre cêrca de 340 metros por segundo. Quantos metros percorrerá êle no fim de 4 horas?
R. *4896000 metros.*

14. A luz do Sol leva 8 minutos e 13 segundos para chegar à Terra. Calcular a distância entre os dois astros, sabendo-se que a velocidade da luz é de 300000 km por segundo.
R. *147900000 km.*

15. Sabendo-se que em 1 quilograma de água pura há aproximadamente 111 gramas de hidrogênio e 889 gramas de oxigênio, calcular o número de gramas de cada um dêsses gases que há em 25 quilogramas daquele líquido.

R. *2775 ; 22225.*

16. O Sol é 1300000 vêzes maior do que a Terra, e o volume desta 49 vêzes maior que o da Lua. Quantas vêzes o volume daquele é maior do que o desta?

R. *63700000.*

17. A atmosfera exerce, normalmente, uma pressão de 1033 gramas sôbre a superfície de um centímetro quadrado. Qual é a pressão que ela exerce sôbre o corpo humano, tomando-se a superfície média dêste igual a 15000 centímetros quadrados?

R. *15495000 gramas.*

18. Quantos operários seriam necessários para construir, num dia, um reservatório de 12 metros de comprimento, 5 de largura e 3 de altura, sabendo-se que 8 operários gastaram 15 dias, de 8 horas, para realizar o mesmo trabalho?

R. *120 dias.*

POTENCIAÇÃO

Potência de um número é o produto de dois ou mais fatores iguais a êle. Assim, $3 \times 3 \times 3 = 27$ é uma potência de 3.

O fator que se repete chama-se *base*, e o número dos fatores denomina-se *grau* da potência.

Ex.: $2 \times 2 \times 2 = 8$ é a *terceira potência* de 2 ou uma potência do 3.° grau; $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ é a *quinta potência* de 3 ou uma potência do 5.° grau.

Representa-se abreviadamente uma potência, escrevendo a base e indicando o grau por um número denominado *expoente*. Êste é um número escrito em algarismos menores que a base e colocado à direita e um pouco acima dela. *Ex.:* $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ escreve-se

$$3^5$$

e diz-se:

243 3^5 é a quinta potência de 3, 5 é o expoente da potência e 3, a base.

A primeira potência de um número é o próprio número que se considera como elevado a potência 1; não se escreve. *Ex.:* $5^1 = 5$; $8^1 = 8$.

Quadrado e cubo. — A segunda potência de um número denomina-se *quadrado*, e a terceira potência, *cubo*. Assim, $3^2 = 9$ é o quadrado de 3; $4^3 = 64$ é o cubo de 4.

Os quadrados compreendidos entre 1 e 10, são:

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Os cubos compreendidos entre os números 1 e 10 são:

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubos	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

DIVISÃO

Divisão é a operação que tem por fim, dados o produto de dois fatores e um dêles, determinar o outro.

O produto dado recebe o nome de *dividendo*; o fator conhecido chama-se *divisor*, e o fator que se procura *quociente*. O dividendo e o divisor denominam-se *termos da divisão*.

Exemplo:

$$72 : 9 = 8$$

72 e 9 são os *termos*, 72 é o *dividendo*, 9 é o *divisor* e 8, o *quociente*.

A divisão também pode ser definida de duas outras maneiras:

Divisão é a operação que tem por fim procurar quantas vêzes um número contém outro.

Divisão é a operação que tem por fim repartir um número em tantas partes iguais quantas são as unidades do outro.

Para indicar a divisão, emprega-se o sinal : ou ÷, que se lê: *dividido por*.

Assim, para indicar o quociente de 18 por 6 escreve-se

$$18 : 6 \text{ ou } 18 \div 6$$

Pode-se também empregar um traço horizontal colocado entre os números dados. Assim, podemos escrever

$$\frac{18}{6}$$

Quando, numa divisão, o produto do quociente pelo divisor dá um número igual ao dividendo, é nulo o resto da subtração entre aquele produto e o dividendo. Diz-se, então, que a divisão é *exata* e que o seu *resto* também é nulo.

No caso em que o produto do quociente pelo divisor fornece um número menor que o dividendo, o resto da subtração entre aquele produto e o dividendo é diferente de zero. A divisão chama-se, então, *inexata* e o resto da subtração é o *resto* da divisão.

Representa-se uma *divisão exata efetuada*, como mostra o exemplo seguinte:

$$18 : 6 = 3 \quad \text{ou} \quad 18 \div 6 = 3 \quad \text{ou} \quad \frac{18}{6} = 3$$

Uma *divisão inexata efetuada* representa-se como segue:

$$21 = 5 \times 4 + 1$$

sendo 1 o *resto* da divisão.

Na divisão de números inteiros, consideram-se quatro casos:

1.º) *Divisor simples, devendo ser simples o quociente*;

2.º) *Divisor simples, devendo ser composto o quociente*;

3.º) *Divisor composto, devendo ser simples o quociente*;

4.º) *Divisor composto, devendo ser composto o quociente.*

1.º caso. — E' bastante subtrair sucessivamente o divisor do dividendo até que não seja mais possível realizar a subtração. O número de subtrações realizadas será o quociente e o resto da última subtração, o resto da divisão.

Na prática, porém, opera-se com mais rapidez retendo de memória todos os resultados a que se

pode chegar nas divisões do primeiro caso. Aliás, êsses resultados podem ser obtidos na tabela do Pitágoras, seguindo o modo indicado na subtração. Como nem sempre o dividendo é múltiplo do divisor, procura-se na tabela o maior múltiplo do divisor, contido no dividendo; o número pelo qual é necessário multiplicar o divisor para obter êsse múltiplo é o quociente procurado.

2.° caso. — Efetua-se a divisão empregando a seguinte

Regra. — *Escreve-se o divisor à direita do dividendo; separa-se um do outro por meio de um risco vertical, e o divisor do quociente por meio de um risco horizontal. Em seguida, procuram-se quantas vêzes o divisor está contido no número formado pelo primeiro algarismo à esquerda do dividendo, ou pelos dois primeiros, quando o primeiro for menor que o divisor. Escreve-se êsse número no quociente, multiplica-se pelo divisor, e subtrai-se o produto do dividendo parcial, que é o número formado pelo primeiro ou pelos dois primeiros algarismos à esquerda do dividendo total. Escreve-se à direita do resto o algarismo seguinte do dividendo principal e tem-se um segundo dividendo parcial; e assim se prossegue até ter considerado o último algarismo do dividendo principal. Se o número formado pelo resto e o algarismo seguinte do dividendo parcial não contiver o divisor, escreve-se zero no quociente, considera-se o algarismo seguinte do dividendo principal e continua-se a operação (1).*

(1) Na prática, a diferença entre o dividendo parcial considerado e o produto do divisor pelo quociente obtido, realiza-se mentalmente.

Exemplo: Seja dividir o número 8413 por 7.

```
dividendo . . . 8413 | 7 . . . divisor   8413 | 7
                7    |______             14   |______
                      1201 . . quociente 013    1201
2.° dividendo parcial 14                    6
                14
3.° dividendo parcial 013
                  7
                  6 . . . resto
```

3.° caso. — A divisão é efetuada nesse caso com a seguinte

Regra. — *Escreve-se o divisor à direita do dividendo; separa-se êste daquele por meio de um traço vertical, e o divisor do quociente por meio de um traço horizontal. Em seguida, divide-se o número formado pelo primeiro ou dois primeiros algarismos do dividendo pelo número representado pelo primeiro algarismo do divisor. Multiplica-se o quociente obtido pelo divisor; se o produto for menor que o dividendo será verdadeiro o quociente achado; se for maior, subtrai-se do quociente uma ou mais unidades sucessivamente até que o seu produto pelo divisor seja um número menor que o dividendo.*

Exemplo: Seja dividir o número 587 por 85.

```
 587 | 85          587 | 85
 510   6            77   6
 ---
  77
```

4.° caso. — Neste último caso emprega-se a seguinte

Regra geral. — *À direita do dividendo escreve-se o divisor; separam-se um do outro por um traço vertical e o divisor do quociente por um traço horizontal. Depois, separam-se no dividendo, a partir da esquerda, tantos algarismos quantos são necessários para constituir um número que contenha o divisor uma vez pelo menos, mas menos de dez vêzes; divide-se êsse número pelo divisor e obtém-se o primeiro algarismo do quociente; multiplica-se êsse quociente pelo divisor e subtrai-se o produto obtido do dividendo; escreve-se à direita do resto o algarismo seguinte do dividendo e tem-se um novo dividendo parcial; divide-se êste pelo divisor e tem-se o segundo algarismo do quociente, com que se opera como para o primeiro; assim se prossegue até que se tenham considerados todos os algarismos do dividendo.*

Exemplo: Seja dividir o número 9458 por 38.

```
9458 | 38              9458 | 38
76     248             185    248
----                    338
185                      34
152
----
 338
 304
 ---
  34
```

Casos particulares. — 1.º) *Para dividir um número, formado de algarismos significativos acompanhados de zeros, por outro formado pela unidade seguida de menor ou igual número de zeros, suprimem-se tantos zeros da direita do dividendo quantos são os zeros do divisor.*

Exemplo: Seja dividir 248000 por 100.

Escreve-se o número 248000 e suprimem-se dois zeros da sua direita; obtém-se o quociente procurado 2480.

2.º) *Para dividir um número por outro, quando ambos terminam em zeros, suprime-se neles o mesmo número de zeros;* o quociente não se altera, mas o resto ficará multiplicado pela unidade acompanhada de tantos zeros quantos foram suprimidos.

Exemplo: Seja dividir 34000 por 600.

Teremos

```
340(00 | 6(00
 40      56
  400
```

Provas. — Na divisão empregam-se geralmente as seguintes:

1.ª) Consiste em multiplicar o divisor pelo quociente e somar o produto obtido com o resto, se houver. O resultado deverá ser igual ao dividendo.

2.ª) Prova *dos 9, dos 2,* etc.

Observação. — Às vêzes, o quociente de dois números pode ser determinado ràpidamente com o emprêgo do cálculo mental.

PRINCÍPIOS RELATIVOS À MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

1.° — *O produto de dois ou mais fatores não se altera quando se muda a ordem dos mesmos.*

Exemplo:

$$7 \times 3 \times 8 = 8 \times 7 \times 3$$

2.° — *Quando se torna o multiplicando ou o multiplicador certo número de vêzes maior ou menor, o produto também fica o mesmo número de vêzes maior ou menor.*

3.° — *Quando se tornam o multiplicando e o multiplicador, ao mesmo tempo, o mesmo ou diferente número de vêzes maiores ou menores, o produto fica um número de vêzes maior ou menor igual ao produto dos fatores introduzidos ou suprimidos.*

4.° — *Tornando o dividendo certo número de vêzes maior ou menor, o quociente fica o mesmo número de vêzes maior ou menor.*

5.° — *Tornando-se o divisor certo número de vêzes maior ou menor, o quociente fica o mesmo número de vêzes menor ou maior.*

6.° — *Numa divisão exata, o quociente não muda quando se tornam o dividendo e o divisor o mesmo número de vêzes maior ou menor.*

7.° — *Numa divisão inexata, o quociente não se altera quando se tornam o dividendo e o divisor certo número de vêzes maior ou menor, mas o resto torna-se o mesmo número de vêzes maior ou menor.*

Exercícios.

Efetuar mentalmente as divisões seguintes:

1.	$125 \div 5$	R. 25	6.	$700 \div 50$	R. 14
2.	$315 \div 7$	R. 45	7.	$1500 \div 300$	R. 5
3.	$450 \div 15$	R. 30	8.	$6100 \div 400$	R. 16
4.	$600 \div 40$	R. 15	9.	$270 \div 18$	R. 15
5.	$480 \div 30$	R. 16	10.	$2160 \div 180$	R. 12

Efetuar as divisões seguintes:

1.	$1750 \div 14$	R. 125	7.	$105105 \div 105$	R. 1001
2.	$6336 \div 18$	R. 352	8.	$664587 \div 137$	R. 4851
3.	$9666 \div 27$	R. 358	9.	$3372558 \div 354$	R. 9527
4.	$113864 \div 86$	R. 1324	10.	$2539236 \div 9842$	R. 258
5.	$371132 \div 82$	R. 4526	11.	$57792 \div 15$	R. 3852; resto 12
6.	$719928 \div 72$	R. 9999	12.	$840501 \div 105$	R. 8004; resto 81

Efetuar as seguintes operações:

1. $5 \times 2 - 21 \div 7 + 3 \times 8 \div 2 - 27 \div 9 \div 3$ R. 18
2. $15 + 16 \div 4 - 12 \div 2 \times 3 + 15 \times 3 \times 2 - 18 \div 2$ R. 82
3. $(5 \times 4 + 12 \div 6) \times 3 - (14 \div 7 - 5 + 8) \times 5 + 105 \div 3$ R. 76
4. $(4 + 12 \times 3 \times 15 \div 45 - 8) \times 4 + 154 \div 7 \div 11 + 3(5 + 8 + 2)$ R. 79
5. $(5 + 4) \times (2 \times 3) + 8 \times (9 - 5) \times (8 - 7) + 6 \times 3 \div 2$ R. 95
6. $100 \div 4 + 14 \div 7 \times 3 - 2 \times (3 + 4) \times (5 + 8 - 2) + 156$ R. 33
7. $(2 \times 3) + (5 \times 4 \div 2) \times 3 + 8 - (3 \times 2) \times (5 + 3) \div 24$ R. 42
8. $(25 + 8) \div 11 - 2 \times 4 + 9 \div 3 \times 4 - 5 \times (7 \times 4 \div 2 + 8) +$
   $+ 12 \div 4 - 3 \times (5 + 4 - 2) + 201$ R. 80
9. $(3 + 8 \times 2) \times (4 + 5 - 3 \times 2) - 4 \times (5 \times 3 - 9) \times (18 \div 9)$ R. 9
10. $18 \div (4 + 2 - 5 \times 2 + 6) + 15 \div 3 \times (4 + 3) - 9 \div 3 + 5 \times 4$
    $\times 7 - (7 \times 2 + 28 \div 14) \times 3$ R. 133

Problemas.

1. Um canhão troou a uma distância de 2720 metros e o ruído só foi ouvido depois de 8 segundos. Quanto percorre o som no ar em um segundo? **R.** *340 metros.*

2. De 221200 litros de ar podem ser retirados 174748 litros de azoto. De 100 litros de ar quanto se pode obter de azoto?

R. *79 litros.*

3. Quanto pesa 1 metro cúbico de madeira sabendo-se que 125 metros cúbicos pesam 81500 quilogramas?

R. *652 quilogramas.*

4. Aumentando-se de 8 unidades o multiplicador de um produto, êste cresce de 200 unidades. Qual é o multiplicando?

R. *25.*

5. Três dúzias de ovos pesam 2016 gramas. Quanto pesa um ovo?

R. *56 gramas.*

6. Uma cidade de 185600 habitantes tem um abastecimento de 24499200 litros de água por dia. Quanto pode dispender um habitante em 24 horas? **R.** *132 litros.*

7. Devendo-se reservar nas escolas um espaço de 13 metros cúbicos por aluno, quantos alunos deve no máximo conter uma sala cuja cubagem é de 592 metros cúbicos?

R. *45 alunos.*

8. Em 47 horas um relógio atrasa 4841 segundos. Quanto atrasa em 60 minutos? **R.** *103 segundos.*

9. O ciclo solar dura 28 anos. Em 1937 quantos ciclos se registaram e sobram ainda quantos anos?

R. *69 ciclos e sobram 5 anos.*

10. Com que idade morreu uma pessoa que viveu 679 meses?

R. *56 anos e 7 meses.*

11. Qual é o número que multiplicado por 708 dá um produto igual a 1767168?

R. *2496.*

12. Numa divisão achou-se para quociente 247 e para resto 287. Sendo o dividendo igual a 198628, qual será o divisor?

R. *803.*

13. Se uma peça de 85 metros de fazenda custou 59$925, quanto custou cada metro?

R. *705 réis.*

14. Se uma peça de fazenda, comprada a 705 réis o metro, custou 59$925, achar quantos metros tinha a peça.

R. *85 metros.*

15. Sabendo-se que um barril contém 250 litros de vinho, e que custou 325$000, dizer quanto custou cada litro de vinho.

R. *1$300.*

16. Sabendo-se que um barril de vinho, comprado a 840 réis o litro importou em 275$520, dizer quantos litros de vinho o barril contém.

R. *328 litros.*

17. Um capitão quer dispor 1530 soldados em uma praça retangular formando 34 fileiras de homens. Quantos ficarão em cada fileira? **R.** *45.*

18. Quantos paralelepípedos de pedra de forma quadrada, tendo 20 centímetros de lado, serão precisos para calçar uma superfície de forma retangular, tendo 240 centímetros de comprimento por 160 centímetros de largura?

R. *96.*

19. Numa divisão em que o divisor é 1387, um aluno achou 2840 de resto, tendo achado certos todos os algarismos do quociente, exceto o último. Achar quanto se deve acrescentar ao quociente e qual é o verdadeiro resto.

R. *Deve-se acrescentar 2 ao quociente; o verdadeiro resto 66.*

20. Sabendo-se que uma roda dá 28800 voltas por hora, achar quantas voltas dá por segundo. **R.** *8 voltas.*

PROBLEMAS DE RECAPITULAÇÃO:

1. Se à minha idade juntassem 23 anos, faltariam 5 anos para tê-la duplicada. Qual é ela?

R. *28 anos.*

2. Se eu tivesse mais 57$000 poderia saldar duas dívidas de, respectivamente, 125$300 e 247$700. De quanto disponho?

R. *316$000.*

3. Levanto-me às 5 horas da manhã e deito às 10 horas da noite. Quanto tempo me mantenho fora do leito?

R. *17 horas.*

4. De 98 gramas de ácido sulfúrico, que é formado de enxôfre, oxigênio e hidrogênio, podem ser retirados 32 gramas de enxôfre e 64 de oxigênio. Quanto se pode obter de hidrogênio?

R. *2 gramas.*

5. A soma de dois números é 513. Se da têrça parte da soma tirássemos a têrça parte de um dêles teríamos 87. Quais são estes números?

R. *252 e 261.*

6. Devendo a área de um cemitério ser de 340 metros quadrados por mil habitantes, quanto falta a uma área de 1730 metros quadrados para poder prestar-se a um cemitério de uma cidade de 56000 habitantes?

R. *17310 metros quadrados.*

7. Posso pagar uma dívida de 2:160$000 em 6 prestações mensais iguais, sobrando-me ainda 110$000 mensalmente. De quanto posso dispor por mês?

R. *470$000.*

8. Se eu gastasse 280$000 teria a metade do que tenho mais 70$000. Quanto tenho?

R. *700$000.*

9. Aumentando-se 5 unidades a um dos fatores, o produto aumentou de 180. Qual é o outro fator?

R. *36.*

10. O produto de dois números é 9282. Aumentando-se um dêles de 3 unidades o produto torna-se 9945. Quais são estes números?

R. *221 e 42.*

11. Um proprietário comprou com 20:000$000, quatro terrenos: pagou ao 1.° 3:200$000, a 800$000 o alqueire; ao 2.°, 4:800$000, a 600$000 o alqueire; ao 3.°, 4:300$000, a 860$000 o alqueire e ao 4.° o restante a 700$000 o alqueire. Quantos alqueires têm os 4 terrenos?

R. *28 alqueires.*

12. Numa subtração, a soma do minuendo com o subtraendo e com o resto é igual a 48036, e o subtraendo é igual ao resto. Achar o minuendo, o subtraendo e o resto.

R. *O minuendo é igual a 24018; o subtraendo e o resto são iguais a 12009.*

13. Numa subtração o minuendo é igual a 486, e o subtraendo excede o resto em 28 unidades. Achar o subtraendo e o resto.

R. *O subtraendo é igual a 257 e o resto é igual a 229.*

14. A soma de dois números é 84 e a sua diferença é 32. Achar estes dois números.

R. *Os dois números são 58 e 26.*

15. Numa adição de 6 parcelas, cada uma delas excede a anterior em 18 unidades. Sendo a soma igual a 2790 achar o valor de cada parcela.

R. *As 6 parcelas são: 420, 438, 456, 474, 492 e 510.*

16. Numa adição de 6 parcelas, três delas são iguais entre si, e as outras três também o são. Sabendo-se que a diferença entre uma parcela de um grupo e do outro grupo é de 305 unidades, achar cada parcela, sendo a soma das 6 parcelas igual a 29757.

R. *As três parcelas de um grupo são iguais a 4807 cada uma e as do outro grupo são iguais a 5112 cada uma.*

17. Um trem parte da estação A às 8 horas da manhã seguindo para a estação B com a velocidade de 45 km por hora. Sabendo-se que a distância entre as estações A e B é de 495 km, pergunta-se a que horas o trem chegará à estação B.

R. *Às 19 horas.*

18. Um trem parte às 7 horas da estação A seguindo para a estação B, com a velocidade de 25 km por hora. Um outro trem parte às 9 horas da estação B seguindo para a estação A com a velocidade de 35 km por hora. A que horas, e a que distância das estações A e B se dará o encontro dos dois trens sendo a distância entre as 2 estações de 230 km.

R. *O encontro se dará às 12 horas, a 125 km da estação A e a 105 km da estação B.*

19. Um trem parte da estação A às 6 horas, seguindo para a estação B com a velocidade de 32 km por hora. Parte, às 8 horas, um outro trem da mesma estação A seguindo também para a estação B, com a velocidade de 40 km por hora. Dizer a que horas e a que distância da estação A o 2.° trem alcançará o 1.°

R. *O encontro se dará às 16 horas e terá lugar a 320 km da estação A.*

20. Um negociante comprou 18 peças de fazenda, tendo cada peça 25 metros, à razão de 1$250 o metro ; e vendeu cada metro por 1$800. Quanto ganhou nas 18 peças?

R. *Ganhou 247$500.*

21. Um negociante comprou uma peça de 28 metros de fazenda por 560$000 e vendeu a 25$000 o metro. Quanto ganhou, ou quanto perdeu no negócio?

R. *Ganhou 140$000.*

22. Uma senhora comprou 12 metros de fazenda e deu uma cédula de 200$000 recebendo de trôco 2 cédulas de 20$000, 4 de 10$000 e 9 de 5$000. Quanto custou o metro da fazenda?

R. *Custou 6$250.*

CAPÍTULO III

Frações decimais

Fração decimal ; número decimal. — *Fração decimal* é tôda a fração cujo denominador é uma potência de 10. *Exemplos.*

$$\frac{3}{10}, \quad \frac{11}{100} \quad \text{e} \quad \frac{27}{1000}$$

Quando dividimos a unidade em 10 partes iguais cada uma delas será um *décimo* e a unidade valerá, portanto, 10 décimos.

Dividindo cada décimo em 10 partes iguais, a unidade ficará dividida em 100 partes iguais, cada uma das quais será um *centésimo*. Assim, a unidade vale 100 centésimos e um décimo, 10 centésimos.

Dividindo cada centésimo em 10 partes iguais, a unidade ficará dividida em 1000 partes iguais e cada uma será um *milésimo*. A unidade, portanto, vale 1000 milésimos e um centésimo vale 10 milésimos.

Prosseguindo-se do mesmo modo, tem-se:

um milésimo vale 10 *décimos-milésimos* e a unidade tem 10000 décimos-milésimos ;

um décimo-milésimo vale 10 *centésimos-milésimos* e a unidade tem 100000 centésimos-milésimos; e assim por diante.

As partes decimais têm as seguintes denominações:

décimos	1.ª	ordem
centésimos	2.ª	„
milésimos	3.ª	„
décimos-milésimos	4.ª	„
centésimos-milésimos	5.ª	„
milionésimos	6.ª	„
décimos-milionésimos	7.ª	„

e assim por diante.

Do que ficou dito acima conclue-se que o princípio convencional da numeração escrita aplica-se às partes decimais da unidade, isto é, às frações decimais, tal como aos números inteiros: 10 *unidades de uma ordem valem uma unidade de ordem imediatamente superior.* Êsse princípio permite escrever as frações decimais de modo análogo aos números inteiros, bastando que se aplique a convenção fundamental da numeração escrita, e que se empregue um sinal para separar a parte inteira da parte fracionária. Êste sinal é uma *vírgula*, colocada entre a parte inteira e a parte fracionária.

Assim, a fração decimal $\frac{127}{100}$ será representada do seguinte modo: 1,27.

Fica assim a *fração decimal* $\frac{127}{100}$ escrita sob a forma de *número decimal*: 1,27.

Conversão de fração decimal em número decimal, e viceversa. — Para transformar uma fração decimal em número decimal, escreve-se o numerador e nele se separa, a partir da direita, por meio de uma vírgula, tantos algarismos quantos são os zeros do denominador.

Exemplo.

$$\frac{451}{100} = 4{,}51$$

Quando o número de zeros do denominador for maior que o número de algarismos do numerador, escreve-se à esquerda dêste o número de zeros que for necessário.

Exemplo.

$$\frac{13}{1000} = 0{,}013$$

Para transformar um número decimal em fração decimal, escreve-se uma fração cujo numerador é o número decimal sem a vírgula e cujo denominador é a unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos decimais.

Exemplo.

$$17{,}38 = \frac{1738}{100}$$

Modo de ler um número decimal. — Para ler números decimais, lê-se a parte inteira, seguida do nome unidades, em seguida, a decimal acompanhada do nome da unidade representada pelo último algarismo da direita.

Exemplo. O número decimal 18,35 lê-se: dezoito unidades e trinta e cinco centésimos.

Pode-se, também, ler o número como se fosse inteiro, juntando-se ao último algarismo a denominação respectiva.

Exemplo. O número decimal 18,35 também pode ser lido da seguinte maneira: mil oitocentos e trinta e cinco centésimos.

Modo de escrever um número decimal. — Para escrever números decimais, escreve-se a parte inteira, depois uma vírgula, e, em seguida, a parte decimal colocando cada algarismo no lugar das unidades que representa, tendo o cuidado de preencher com zeros as ordens que não tiverem unidades.

Exemplos. O número decimal doze unidades, duzentos e quarenta e cinco milésimos, escreve-se 12,245.

O número dezessete décimos-milésimos, escreve-se 0,0017.

PROPRIEDADES DOS NÚMEROS DECIMAIS

1.ª *Propriedade.* — *O valor de um número decimal não muda colocando ou suprimindo zeros à sua direita.*

Assim,

4,15 = 4,150

Do mesmo modo

8,4300 = 8,43

2.ª *Propriedade.* — *Para multiplicar um número decimal por 10, 100, 1000 . . . . . ., desloca-se a vírgula uma, duas, três . . . casas para a direita.*

Exemplos.

5,1283 × 10 = 51,283
5,1283 × 100 = 512,83
5,1283 × 1000 = 5128,3
5,1283 × 100000 = 512830

3.ª *Propriedade.* — *Para dividir um número decimal por 10, 100, 1000 . . . . . ., desloca-se a vírgula uma, duas, três . . . casas para a esquerda.*

Exemplos.

83,723 : 10 = 8,3723
83,723 : 100 = 0,83723
83,723 : 1000 = 0,083723

OPERAÇÕES

Adição. — Para somar números decimais, emprega-se a seguinte

Regra. — *Para somar números decimais, escrevem-se uns debaixo dos outros, de modo que as vírgulas se correspondam em coluna vertical; somam-se depois como se fossem inteiros, colocando-se finalmente a vírgula, na soma, correspondendo às das parcelas.*

Exemplos.

1.º) 0,25 + 7,2 + 6,423 + 18,75.
2.º) 3,8972 + 2,79 + 1,463 + 3,7.
3.º) 0,45 + 0,372 + 0,4589.

1.º)	2.º)	3.º)
0,25	3,8972	0,45
7,2	2,79	0,372
6,423	1,463	0,4589
18,75	3,7	
32,623	11,8502	1,2809

Subtração. — Na subtração de números decimais, usa-se a

Regra. — *Para subtrair números decimais, escreve-se o minuendo e por baixo dêle o subtraendo, de modo que as vírgulas se correspondam verticalmente; em seguida, subtraem-se como se fossem números inteiros, colocando-se finalmente no resultado uma vírgula, correspondendo às dos termos.*

Exemplos.

1.°) 12,573 − 4,805.
2.°) 3,5 − 0,0042.

1.°)
```
 12,573
  4,805
 ------
  7,768
```

2.°)
```
 3,5000
 0,0042
 ------
 3,4958
```

Multiplicação. — Na multiplicação de números decimais aplica-se a seguinte

Regra. — *Para multiplicar números decimais, multiplicam-se como se fossem números inteiros e separam-se à direita do produto tantas casas decimais quantas houverem em ambos os fatores.*

Exemplos.

1.°) Multiplicar 5,832 por 7.

```
  5,832
      7
 ------
 40,824
```

Dispõem-se convenientemente os fatores, faz-se abstração da vírgula no fator 5,832 e multiplica-se por 7. Como o multiplicando tem três casas decimais, separam-se à direita do produto total 40824, três casas decimais, e o produto procurado será 40,824.

2.°) Multiplicar 32,458 por 7,3.

```
    32,458
       7,3
 ---------
     97374
   227206
 ---------
  236,9434
```

Colocam-se os dois fatores convenientemente, faz-se abstração das vírgulas, isto é, multiplica-se o número 32458 por 73. Como no multiplicando há três casas decimais e no multiplicador uma, separam-se à direita do produto obtido 2369434, quatro casas decimais. Assim, o produto procurado será 236,9434.

Divisão. — Para efetuar a divisão de números decimais, emprega-se a

Regra. — *Para dividir um número decimal por outro, reduzem-se ao mesmo número de algarismos decimais, empregando-se zeros quando for necessário, e opera-se, depois, com os números inteiros que se obtêm suprimidas as vírgulas.*

Exemplos.

1.°) Dividir 72,38 por 7.

```
 72,38 | 7,00        7238 | 700
                     0238   10
```

Dispostos convenientemente, dividendo e divisor, reduzem-se os dois termos ao mesmo número de algarismos decimais, isto é, coloca-se uma vírgula à direita do divisor e dois zeros. Suprimem-se as vírgulas dos números 72,38 e 7,00, e divide-se em seguida o número 7238 por 700.

Nessa divisão obtemos o quociente inteiro 10 e o resto 238. Para completar o quociente coloca-se uma vírgula à direita dêste e um zero à direita do resto. Prossegue-se a ope-

ração, colocando zeros à direita dos restos obtidos e dividindo--os pelo divisor.

```
7238  | 700
02380   10,34
 2800
  000
```

2.º) Dividir 0,72 por 15.

```
0,72 | 15,00        7200  | 1500
                    12000   0,048
                     0000
```

Dispõem-se convenientemente os termos da divisão, reduzem-se ao mesmo número de algarismos decimais, isto é, colocam-se uma vírgula e dois zeros à direita do divisor. Suprimem-se as vírgulas dos números obtidos 0,72 e 15,00, e divide-se, depois, o número 72 por 1500.

O quociente inteiro dessa divisão é 0 e para completá-lo, coloca-se-lhe uma vírgula à direita e à direita do dividendo 72 colocam-se zeros de modo a poder prosseguir na divisão. O quociente será, pois, 0,048.

Quociente aproximado. — Seja dividir o número 17 por 5.

A divisão não é exata e o quociente procurado está compreendido entre os números 3 e 4, pois

$$5 \times 3 = 15$$
$$5 \times 4 = 20$$

Tomando 3 ou 4 para quociente dessa divisão, cometeremos um êrro *menor que uma unidade*, no primeiro caso *por falta*, e no segundo *por excesso*.

Assim, 3 e 4 são *quocientes aproximados* da divisão de 17 por 5.

Os números 3 e 4 são quocientes aproximados *sem êrro de uma unidade*.

Na prática, tomam-se os quocientes aproximados, sem êrro de uma unidade por falta. Pode-se também tomar o quociente aproximado por falta, na divisão de um número por outro, *há menos* de

$$\frac{1}{10}, \text{ de } \frac{1}{100}, \text{ etc.}$$

Regra. — *Para obter o quociente aproximado de* $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, *etc., por falta, de dois números inteiros, multiplica-se o dividendo por* 10, 100, *etc., procura-se depois o quociente, sem êrro de uma unidade, por falta, do dividendo obtido pelo divisor e coloca-se a vírgula no resultado de modo a exprimir décimos, centésimos, etc.*

Exemplo. Seja determinar o quociente aproximado de $\frac{1}{10}$ por falta de 17 por 6.

```
170 | 6
 50   2,8
  2
```

Multiplica-se o dividendo 17 por 10, para convertê-lo em décimos, e divide-se em seguida por 6. Obtém-se o quociente, sem êrro de uma unidade, por falta, de 170 por 6. Colocando a vírgula nesse quociente, para exprimir décimos, resulta o quociente procurado 2,8.

Regra. — *Para obter o quociente aproximado de* $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, *etc., por falta, de dois números decimais, tiram-se as vírgulas, multiplica-se o dividendo por* 10, 100, *etc., determina-se o quociente, sem êrro de uma*

unidade por falta, do dividendo pelo divisor, e coloca-se no resultado a vírgula de modo a exprimir décimos, centésimos, etc.

Exemplo. Seja determinar o quociente aproximado de $\frac{1}{10}$ por falta de 6,4 por 0,25.

```
640 | 25          6400 | 25
                   140   25,6
                    150
                     00
```

Reduzindo ao mesmo número de algarismos decimais e tirando a vírgula, o dividendo e o divisor tornam-se respectivamente 640 e 25. Multiplicando o dividendo por 10, para convertê-lo em décimos, temos 6400. Determinando o quociente de 6400 por 25 sem êrro de uma unidade por falta, obtém-se 256. Colocando a vírgula de modo a exprimir décimos, resulta 25,6 que é o quociente procurado.

Exercícios.

Escrever os seguintes números decimais :

1. Dois décimos.
2. Uma unidade e cinco décimos.
3. Doze décimos.
4. Quatro unidades e sete décimos.
5. Quarenta e dois décimos.
6. Três centésimos.
7. Quarenta e um centésimos.
8. Duas unidades e três centésimos.
9. Cinco unidades e vinte e dois centésimos.
10. Quinhentos e vinte e um centésimos.
11. Cinco milésimos.
12. Oito unidades e quatro milésimos.
13. Duas unidades e dezesseis milésimos.
14. Uma unidade e quinhentos e vinte e oito milésimos.

15. Vinte e cinco milésimos.
16. Trezentos e quarenta e dois milésimos.
17. Quatro mil oitocentos e setenta e nove milésimos.
18. Vinte e sete mil quatrocentos e cincoenta e quatro milésimos.
19. Dois décimos-milésimos.
20. Quarenta e oito décimos-milésimos.
21. Cincoenta e oito centésimos-milésimos.
22. Cento e vinte e cinco décimos-milésimos.
23. Quatro unidades e oito décimos-milésimos.
24. Cinco unidades e quatro décimos-milésimos.
25. Oito unidades e cento e vinte e três décimos-milésimos.
26. Sete mil quinhentos e vinte e dois décimos-milésimos.
27. Trinta e cinco mil quatrocentos e oitenta e cinco décimos-milésimos.
28. Doze unidades e vinte e oito centésimos-milésimos.
29. Dezoito unidades duzentos e quatro centésimos-milésimos.
30. Três unidades duzentos e quarenta e cinco milionésimos.

Ler os seguintes números decimais :

1. 0,6	6. 0,53	11. 0,025	16. 0,4092
2. 0,004	7. 12,7	12. 0,0482	17. 0,58472
3. 0,07	8. 41,83	13. 5,4005	18. 12,00453
4. 0,0253	9. 5,09	14. 0,08006	19. 0,420051
5. 2,7	10. 9,453	15. 2,05402	20. 22,700482

Multiplicar por 10, 100 e 1000 os seguintes números decimais :

1. 0,35	R. 3,5 ; 35 ; 350
2. 5,6	R. 56 ; 560 ; 5600
3. 0,052	R. 0,52 ; 5,2 ; 52
4. 2,36	R. 23,6 ; 236 ; 2360
5. 8,0032	R. 80,032 ; 800,32 ; 8003,2
6. 42,8	R. 428 ; 4280 ; 42800

7. 0,004 R. 0,04 ; 0,4 ; 4
8. 0,025 R. 0,25 ; 2,5 ; 25
9. 1,25 R. 12,5 ; 125 ; 1250
10. 0,527 R. 5,27 ; 52,7 ; 527

Dividir por 10, 100, 1000 os seguintes números decimais :

1. 8 R. 0,8 ; 0,08 ; 0,008
2. 16 R. 1,6 ; 0,16 ; 0,016
3. 235 R. 23,5 ; 2,35 ; 0,235
4. 560 R. 56 ; 5,6 ; 0,56
5. 1248 R. 124,8 ; 12,48 ; 1,248
6. 5,3 R. 0,53 ; 0,053 ; 0,0053
7. 0,6 R. 0,06 ; 0,006 ; 0,0006
8. 25,8 R. 2,58 ; 0,258 ; 0,0258
9. 0,04 R. 0,004 ; 0,0004 ; 0,00004
10. 12,05 R. 1,205 ; 0,1205 ; 0,01205

Reduzir à mesma denominação os números decimais :

1. 0,8 e 0,259
2. 0,6 e 0,32
3. 0,75 e 0,058
4. 5,4 e 12,82
5. 0,235 e 0,1359
6. 0,2 0,42 e 0,9
7. 0,50 0,6 e 0,70
8. 0,006 0,21 e 0,4
9. 0,4352 0,92 e 0,853
10. 5,41 2,7 e 0,45839

Efetuar as seguintes adições :

1. 2,53+0,58 R. 3,11
2. 3,052+2,39 R. 5,442
3. 0,32+4,29 R. 4,61
4. 5,721+3,002+0,04 R. 8,763
5. 2,003+2,15+4,7843 R. 8,9373
6. 1,305+5,708+4,009 R. 11,022
7. 4,2+2,305+5,084+2,0504 R. 13,6394
8. 13,5+0,004+1,0428+35 R. 49,5468
9. 3,52+8+0,527+4,25+0,833 R. 17,130
10. 5+0,354+32,417+0,27+0,32+31,2 R. 69,561

Efetuar as seguintes subtrações :

1. 2,73 − 1,15 R. 1,58
2. 4,128 − 2,07 R. 2,058
3. 2,009 − 1,04 R. 0,969
4. 5 − 0,058 R. 4,942
5. 0,7 − 0,4312 R. 0,2688
6. 832 − 34,0056 R. 797,9944
7. 0,35 − 0,2749 R. 0,0751
8. 11 − 0,00546 R. 10,99454
9. 72,054 − 31,0352 R. 41,0188
10. 0,053489 − 0,013785 R. 0,039704

Efetuar as seguintes multiplicações :

1. 2,37×7 R. 16,59
2. 3×5,439 R. 16,317
3. 0,519×3,2 R. 1,6608
4. 0,32×4,578 R. 1,46496
5. 0,582×12,54 R. 7,29828
6. 15,238×3,459 R. 52,708242
7. 5,2×0,05×0,23 R. 0,0598
8. 0,053×2,4×1,35 R. 0,17172
9. 2,548×0,52×2,7 R. 3,577392
10. 3,008×15×2,04 R. 92,0448

Efetuar as seguintes divisões :

1. 2,8 ÷ 2 R. 1,4
2. 32 ÷ 0,4 R. 80
3. 1,05 ÷ 0,7 R. 1,5
4. 0,75 ÷ 0,125 R. 6
5. 14,464 ÷ 4,52 R. 3,2
6. 4 ÷ 3,2 R. 1,25
7. 0,002 ÷ 0,032 R. 0,0625
8. 0,009 ÷ 11 R. 0,0008181...
9. 0,4396 ÷ 3 R. 0,146533...
10. 0,043264 ÷ 0,052 R. 0,832

Determinar os quocientes das seguintes divisões:

a) com aproximação de $\frac{1}{10}$ b) com aproximação de $\frac{1}{100}$

a)		b)	
1. $21 \div 6$	R. 3,5	1. $0{,}72 \div 16$	R. 0,04
2. $5 \div 11$	R. 0,4	2. $11 \div 3$	R. 3,66
3. $9 \div 3{,}5$	R. 2,5	3. $8 \div 0{,}9$	R. 8,88
4. $7{,}2 \div 5$	R. 1,4	4. $0{,}051 \div 0{,}032$	R. 1,59
5. $5{,}3 \div 1{,}4$	R. 3,7	5. $2{,}47 \div 3{,}7$	R. 0,66

Calcular o valor das expressões seguintes:

1. $(15{,}8+3{,}2)\times 4$ R. 76
2. $(4{,}9+12{,}3-0{,}54)\times 3{,}2$ R. 53,312
3. $(0{,}25+22{,}43-5{,}4)\times(3+0{,}112)$ R. 53,77536
4. $(15+8{,}3-16{,}4)\times(2{,}4-1{,}8)$ R. 4,14
5. $4+2{,}35\times 0{,}8-(3+4{,}21-3{,}12)$ R. 1,79
6. $(6{,}15-0{,}32+3{,}9)-(1{,}25\times 0{,}4)$ R. 9,23
7. $(8{,}3+3{,}5\times 2)\times 3{,}1-(5{,}2-2{,}51)\times 2$ R. 42,05
8. $(3{,}52+2{,}7)\times 2+7{,}5\div 3$ R. 14,94
9. $(15{,}4-12{,}052)\div 0{,}2-1{,}32$ R. 15,42
10. $32-(3{,}4\times 2{,}31-4{,}2)\div 9$ R. 31,594
11. $4{,}8\div 2{,}4\times 3-(0{,}72\div 0{,}36+1{,}5)$ R. 2,5
12. $5+0{,}4\div 0{,}08-(2{,}7-1{,}4\times 0{,}2)\times 3{,}4$ R. 1,772
13. $0{,}125\div 5+4\times 2{,}4-(0{,}82\div 2\times 3+2{,}6)$ R. 5,795
14. $(5+4{,}2-7{,}5\div 5)\times 4-2{,}8\div 7+0{,}6$ R. 31
15. $(3{,}4+2{,}6\div 1{,}3)\times(0{,}35\div 7-0{,}04)+4{,}8\div 2$ R. 2,454

Problemas.

1. Qual a maior e qual a menor das frações 0,4 ; 0,53 ; 0,55 e 0,545?

R. *0,55 é a maior e 0,4 a menor.*

2. Um decímetro cúbico de ferro pesa 7kg,8, e um decímetro cúbico de aço, 7,85kg. Qual o mais pesado?

R. *Um decímetro cúbico de aço.*

3. Combinando-se um litro de oxigênio, que pesa 1,42877 gramas, com 2 litros de hidrogênio, que pesam 0,1797gr, resultam 2 litros de vapor dágua. Quanto pesam estes?

R. *1,60847 gramas.*

4. Em um litro de ar do campo há 0,292 litros de gás carbônico e no ar da cidade 0,032 litros mais. Quanto há de gás carbônico em um litro de ar da cidade?

R. *0,324 litros.*

5. Uma vidraça de uma construção bem cuidada desperdiça 0,253 pelos caixilhos; 0,09 pelos vidros, e 0,18 pelos estores ou cortinados. De quanto é o desperdício?

R. *De 0,523.*

6. Os 0,2534 de um ano, com os 0,734, com 0,03 formam um ano completo?

R. *Formam 1,0174.*

7. Os poros de uma massa de areia representam 0,338 de seu volume; 0,102 já se acham repletos de água. Quantos estão ainda vazios?

R. *0,236.*

8. De quanto a densidade do hidrogênio, que é de 0,0695, é excedida pela do azoto, que é de 0,97?

R. *0,9005.*

9. A composição do pão é a seguinte: amido — 0,5146; açúcar — 0,0402; matérias azotadas — 0,0706; matérias gordurosas — 0,0046; corpos secundários — 0,0141 e o restante água. Qual é a porção desta?

R. *0,3559.*

10. Misturam-se um litro de vinho *Claret* que tem 0,0596 de alcool, com 3 litros de *Champagne*, que tem cada um 0,125 de alcool. A mistura chega a ter meio litro de alcool?

R. *Faltam 0,0654.*

11. Uma garrafa de vinho do Pôrto tem 0,289 de alcool. Quanto de alcool contêm 6 garrafas?

R. *1,734.*

Determinar os quocientes das seguintes divisões:

a) com aproximação de $\frac{1}{10}$

1. 21÷6 R. 3,5
2. 5÷11 R. 0,4
3. 9÷3,5 R. 2,5
4. 7,2÷5 R. 1,4
5. 5,3÷1,4 R. 3,7

b) com aproximação de $\frac{1}{100}$

1. 0,72÷16 R. 0,04
2. 11÷3 R. 3,66
3. 8÷0,9 R. 8,88
4. 0,051÷0,032 R. 1,59
5. 2,47÷3,7 R. 0,66

Calcular o valor das expressões seguintes:

1. (15,8+3,2)×4 R. 76
2. (4,9+12,3−0,54)×3,2 R. 53,312
3. (0,25+22,43−5,4)×(3+0,112) R. 53,77536
4. (15+8,3−16,4)×(2,4−1,8) R. 4,14
5. 4+2,35×0,8−(3+4,21−3,12) R. 1,79
6. (6,15−0,32+3,9)−(1,25×0,4) R. 9,23
7. (8,3+3,5×2)×3,1−(5,2−2,51)×2 R. 42,05
8. (3,52+2,7)×2+7,5÷3 R. 14,94
9. (15,4−12,052)÷0,2−1,32 R. 15,42
10. 32−(3,4×2,31−4,2)÷9 R. 31,594
11. 4,8÷2,4×3−(0,72÷0,36+1,5) R. 2,5
12. 5+0,4÷0,08−(2,7−1,4×0,2)×3,4 R. 1,772
13. 0,125÷5+4×2,4−(0,82÷2×3+2,6) R. 5,795
14. (5+4,2−7,5÷5)×4−2,8÷7+0,6 R. 31
15. (3,4+2,6÷1,3)×(0,35÷7−0,04)+4,8÷2 R. 2,454

PROBLEMAS.

1. Qual a maior e qual a menor das frações 0,4 ; 0,53 ; 0,55 e 0,545?

R. *0,55 é a maior e 0,4 a menor.*

2. Um decímetro cúbico de ferro pesa 7kg,8, e um decímetro cúbico de aço, 7,85kg. Qual o mais pesado?

R. *Um decímetro cúbico de aço.*

3. Combinando-se um litro de oxigênio, que pesa 1,42877 gramas, com 2 litros de hidrogênio, que pesam 0,1797gr, resultam 2 litros de vapor dágua. Quanto pesam estes?

R. *1,60847 gramas.*

4. Em um litro de ar do campo há 0,292 litros de gás carbônico e no ar da cidade 0,032 litros mais. Quanto há de gás carbônico em um litro de ar da cidade?

R. *0,324 litros.*

5. Uma vidraça de uma construção bem cuidada desperdiça 0,253 pelos caixilhos ; 0,09 pelos vidros, e 0,18 pelos estores ou cortinados. De quanto é o desperdício?

R. *De 0,523.*

6. Os 0,2534 de um ano, com os 0,734, com 0,03 formam um ano completo?

R. *Formam 1,0174.*

7. Os poros de uma massa de areia representam 0,338 de seu volume ; 0,102 já se acham repletos de água. Quantos estão ainda vazios?

R. *0,236.*

8. De quanto a densidade do hidrogênio, que é de 0,0695, é excedida pela do azoto, que é de 0,97?

R. *0,9005.*

9. A composição do pão é a seguinte : amido — 0,5146 ; açúcar — 0,0402 ; matérias azotadas — 0,0706 ; matérias gordurosas — 0,0046 ; corpos secundários — 0,0141 e o restante água. Qual é a porção desta?

R. *0,3559.*

10. Misturam-se um litro de vinho *Claret* que tem 0,0596 de alcool, com 3 litros de *Champagne*, que tem cada um 0,125 de alcool. A mistura chega a ter meio litro de alcool?

R. *Faltam 0,0654.*

11. Uma garrafa de vinho do Pôrto tem 0,289 de alcool. Quanto de alcool contêm 6 garrafas?

R. *1,734.*

12. Uma garrafa de cerveja Pilsen tem 0,0347 de alcool. Quanto contêm 7 garrafas e 0,75 ? **R.** *0,268925.*

13. O ano juliano anualmente avançava com um êrro de 0,007744 de dia sôbre o ano astronômico. Estando oficialmente em vigor durante 1257 anos, qual foi o êrro acumulado no fim dêsse tempo? **R.** *9 dias, 734208.*

14. O mês lunar tem 29 dias, 530505 ; 102 meses lunares, 352 a quantos dias correspondem?

R. *3022 dias, 506247760.*

15. A distância média de Venus ao Sol é 0,72333 da distância da Terra ao Sol, que é de 148000000km. Qual é a distância média de Venus à Terra? **R.** *40947160 km.*

16. Quanto de água há em 48 litros de leite de vaca, sabendo-se que um litro de leite tem 0l,875 de água?

R. *42 litros.*

17. Um litro de ar aquecido de 50 graus aumenta de volume 0l,1835. Para o aquecimento de um grau qual o aumento de volume? **R.** *0l,00367.*

18. Um fio de cobre de 82 metros de comprimento alonga-se de 0m,001394 quando a temperatura se eleva de um grau. Qual o alongamento de um fio de um metro nas mesmas condições?

R. *0m,000017.*

19. Quanto de azoto há em um litro de ar, sabendo-se que em 0l,537 de ar há 0l,421545 de azoto?

R. *0l,785.*

20. Sabendo-se que em 0,345 de um quilo de carne de boi gordo há 0kg,09108 de gordura, quanta gordura há em 1 quilo de carne?

R. *0kg,264.*

21. Quantas camadas de tijolos são necessárias para se levantar paredes de 15m,504 de altura, considerando-se que a altura de uma camada de tijolos é de 0m,076?

R. *204 camadas.*

CAPÍTULO IV

Sistema métrico decimal

Definição. — *Sistema métrico decimal* é a reunião de pesos e medidas que têm por base o metro e cujas relações entre as unidades da mesma espécie são decimais.

Unidades principais. — O sistema métrico decimal emprega na medida das grandezas as seguintes *unidades principais :*

Unidade de comprimento : metro
Unidade de superfície : metro quadrado
Unidade de volume : metro cúbico
Unidade de pêso : quilograma
Unidade de capacidade : litro

Unidades secundárias. — Não sendo suficientes, para os usos ordinários da vida prática, as *unidades principais*, adotaram-se outras, que também estão entre si em relação decimal — são as *unidades secundárias*. São estas *múltiplos* e *submúltiplos* da unidade principal.

Múltiplos decimais são unidades dez, cem, mil, etc. vêzes maiores do que a unidade principal.

Designam-se os múltiplos, juntando-se à unidade principal os seguintes prefixos gregos :

deca, que significa 10,
hecto, que significa 100,
quilo, que significa 1000,
míria, que significa 10000.

Submúltiplos decimais são unidades dez, cem, mil, etc. vêzes menores do que a unidade principal.

Para designá-los, juntam-se à unidade principal os seguintes prefixos latinos :

deci, que significa 0,1,
centi, que significa 0,01,
mili, que significa 0,001.

Cada unidade principal, com os seus múltiplos e submúltiplos, forma uma classe de medidas.

Medidas efetivas. — Chamam-se *medidas efetivas* ou *reais* as medidas feitas de madeira, ferro, etc., que se manejam no comércio e na indústria, cujas formas são reguladas por lei e cuja exatidão é verificada periòdicamente pelo Govêrno. *Ex.* : o metro, o duplo-decímetro, etc. As outras medidas que não se podem manejar, como o quilômetro, são denominadas *medidas imaginárias* ou de *cálculo*.

MEDIDAS DE COMPRIMENTO

A unidade principal das medidas de comprimento é o *metro*, base de todo o sistema.

O comprimento do metro é aproximadamente a décima milionésima parte de um quarto do meridiano terrestre. Êste comprimento é pouco maior que 1m,0002.

O metro é designado abreviadamente pela letra *m*.

As unidades de comprimento usadas no Brasil são :

Nomes	*Abreviaturas*	*Valores*
Quilômetro	km	1000 metros
hectômetro	hm	100 metros
decâmetro	dam	10 metros
metro	m	Unidade principal
decímetro	dm	0,1 do metro
centímetro	cm	0,01 do metro
milímetro	mm	0,001 do metro

Numeração das unidades de comprimento. — Do exposto verifica-se que a relação entre as unidades de comprimento do sistema métrico decimal é expressa pelo número 10, isto é, *cada unidade de comprimento é dez vêzes maior que a unidade imediatamente inferior*.

Assim,

15hm = 150dam, 12dm = 120cm e 8cm = 80mm

Modo de escrever e de ler. — Os números que exprimem medidas de comprimento escrevem-se e lêem-se como os números inteiros e decimais.

Exemplos. O número 5 quilômetros, 3 hectômetros, 6 decâmetros, 2 metros e 4 decímetros, escreve-se

5362m,4

O número

5m,32

lê-se : cinco metros e trinta e dois centímetros.

Mudança de unidade. — Para mudar a unidade, em que está escrito um número, para outra que seja múltiplo ou submúltiplo da primeira, emprega-se a seguinte

Regra. — *Para passar um número escrito de uma para outra unidade, muda-se a vírgula,* 1, 2, 3, *etc. casas para a esquerda, se a nova unidade é* 10, 100, 1000, *etc. vêzes maior do que a primeira; se for* 10, 100, 1000, *etc. vêzes menor, muda-se a vírgula* 1, 2, 3, *etc. casas para a direita.*

Assim, temos

532m,4 = 5324dm = 53240cm
532m,4 = 53dam,24 = 5hm,324 = 0,km5324.

Medidas efetivas. — As medidas empregadas constantemente na prática são: o decâmetro, o duplo-decâmetro, o metro, o duplo-metro, o decímetro e o duplo-decímetro.

MEDIDAS DE SUPERFÍCIE

As unidades de superfície são áreas de quadrados que têm para lado qualquer das unidades de comprimento (1).

A unidade principal das medidas de superfície é o *metro quadrado*, cuja abreviatura é m^2. O *metro quadrado* é a área do quadrado que tem um metro de lado.

(1) Veja *Elementos de Geometria e Desenho Linear* do mesmo autor.

As unidades de superfície usadas no Brasil são:

Nomes	*Abreviaturas*	*Valores*
Quilômetro quadrado	km^2	$1000000m^2$
hectômetro quadrado	hm^2	$10000m^2$
decâmetro quadrado	dam^2	$100m^2$
metro quadrado	m^2	Unidade principal
decímetro quadrado	dm^2	$0{,}01m^2$
centímetro quadrado	cm^2	$0{,}0001m^2$
milímetro quadrado	mm^2	$0{,}000001m^2$

Numeração das unidades de superfície. — A relação entre as unidades de superfície é expressa pelo número 100, isto é, *cada unidade de superfície é cem vêzes maior que a unidade imediatamente inferior.*

Assim,

$7dam^2 = 700m^2$; $5m^2 = 500dm^2$; $12dm^2 = 1200cm^2$; etc.

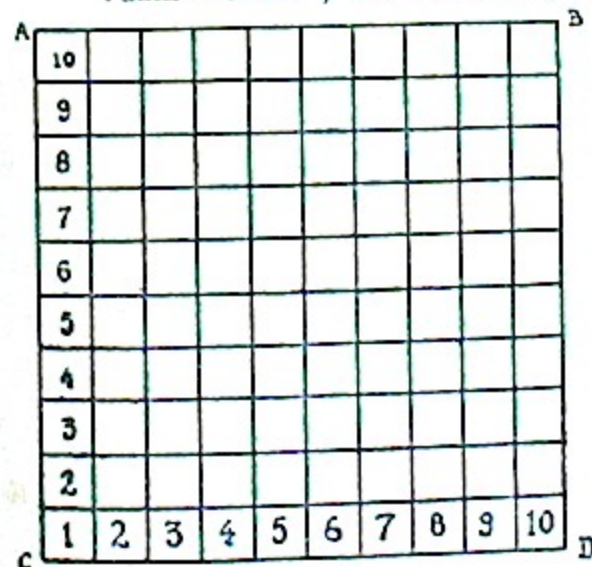



Fig. 1

Com efeito, o quilômetro quadrado é o quadrado que tem um quilômetro de lado. E como o quilômetro tem 10 hectômetros, o quilômetro quadrado é um quadrado que tem 10 × 10 ou 100 hectômetros quadrados de superfície (fig. 1).

Assim,

1 quilômetro quadrado	=	100 hectômetros quadrados
1 hectômetro quadrado	=	100 decâmetros quadrados
1 decâmetro quadrado	=	100 metros quadrados
1 metro quadrado	=	100 decímetros quadrados
1 decímetro quadrado	=	100 centímetros quadrados
1 centímetro quadrado	=	100 milímetros quadrados

Daí se conclue que para exprimir os múltiplos e submúltiplos do metro quadrado devem ser empregados *dois algarismos*.

Modo de escrever e de ler. — Para ler números que exprimem medidas de superfície, lê-se a parte inteira, com a respectiva designação da unidade empregada, e em seguida a parte decimal, com a denominação da menor unidade contida no número considerado.

Exemplo. O número

$$35m^2,5043$$

lê-se: trinta e cinco metros quadrados, cinco mil e quarenta e três centímetros quadrados.

Para escrever números que exprimem medidas de superfície, empregam-se dois algarismos para cada unidade.

Exemplo. O número 5 quilômetros quadrados, 4 decâmetros quadrados, vinte e cinco metros quadrados, oitenta e cinco decímetros quadrados e nove centímetros quadrados escreve-se:

$$5000425m^2,8509$$

Mudança de unidade. — Para mudar a unidade, em que está escrito um número, para outra que seja múltipla ou submúltipla da primeira, emprega-se a seguinte

Regra. — *Para passar um número escrito de uma para outra unidade, muda-se a vírgula* 2, 4, 6, *etc. casas para a esquerda, se a nova unidade é* 100, 10000, 1000000, *etc. vêzes maior do que a antiga; e muda-se a vírgula* 2, 4, 6, *etc. casas para a direita, se for* 100, 10000, 1000000, *etc. vêzes menor.*

Assim, temos

$$42m^2,5872 = 4258dm^2,72 = 425872cm^2 = 42587200mm^2$$

$$\text{e } 42m^2,5872 = 0dam^2,425872 = 0hm^2,00425872$$

Medidas agrárias. — Chamam-se *unidades agrárias* as que são geralmente empregadas para medir superfície de terreno.

A unidade principal é o *are*, cuja abreviatura é *a*. O *are* é um decâmetro quadrado, isto é, um quadrado que tem 10 metros de lado ou 100 metros quadrados de superfície.

As unidades agrárias empregadas no Brasil são:

Nomes	*Abreviaturas*	*Valores*	*Valores*
Hectare	ha	100	10000 met. quadr.
are	a	Unid. princ.	100 met. quadr.
centiare	ca	0,01	1 met. quadr.

Numeração. — A relação entre as unidades agrárias é expressa pelo número 10, isto é, *cada unidade agrária é dez vêzes maior que a unidade imediatamente inferior.*

Assim,

$$15ha,458 = 1545a,8 = 154580ca$$

Daí se conclue que, nas medidas agrárias, os números *lêem-se* e *escrevem-se* segundo as regras dadas para as medidas de comprimento. Do mesmo modo,

a *mudança de unidade* obedece à mesma regra dada para as medidas de comprimento.

Observação. — Não há medidas *efetivas* para as superfícies, que se calculam, depois de medidas por meio das unidades de comprimento.

MEDIDAS DE VOLUME

As medidas de volume são cubos, que têm para aresta qualquer das unidades de comprimento.

A unidade principal das medidas de volume é o metro cúbico, que se representa abreviadamente por m^3. O *metro cúbico* é o volume de um cubo que tem um metro de aresta.

As unidades de volume usadas no Brasil são:

Nomes	*Abreviaturas*	*Valores*
Quilômetro cúbico	km^3	1000000000 met. cúbicos
hectômetro cúbico	hm^3	1000000 met. cúbicos
decâmetro cúbico	dam^3	1000 met. cúbicos
metro cúbico	m^3	Unidade principal
decímetro cúbico	dm^3	0,001 do met. cúbico
centímetro cúbico	cm^3	0,000001 do met. cúbico
milímetro cúbico	mm^3	0,000000001 do met. cúbico

Numeração das unidades de volume. — A relação entre as unidades de volume é expressa pelo número 1000, isto é, *cada unidade de volume é mil vêzes maior que a unidade imediatamente inferior.*

Portanto,

$5dam^3 = 5000m^3$; $8m^3 = 8000dm^3$; $15dm^3 = 15000cm^3$

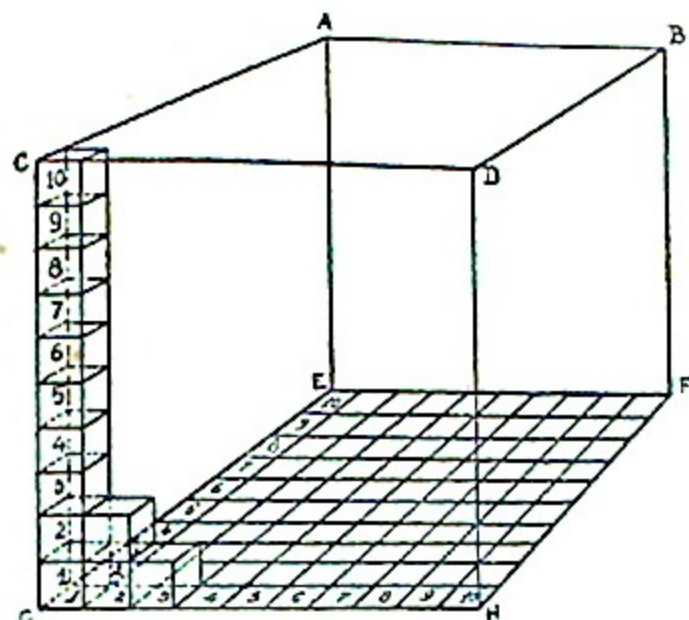



Fig. 2

Com efeito, o quilômetro cúbico é um cubo que tem um quilômetro de aresta; ora, como um quilômetro tem 10 hectômetros, segue-se que o quilômetro cúbico é um cubo que tem $10 \times 10 \times 10$ ou 1000 hectômetros cúbicos de volume (fig. 2).

Assim,

1 quilômetro cúbico = 1000 hectômetros cúbicos.
1 hectômetro cúbico = 1000 decâmetros cúbicos.
1 decâmetro cúbico = 1000 metros cúbicos.
1 metro cúbico = 1000 decímetros cúbicos.
1 decímetro cúbico = 1000 centímetros cúbicos.
1 centímetro cúbico = 1000 milímetros cúbicos.

Daí se conclue que devem ser empregados *três algarismos* para exprimir os múltiplos e submúltiplos do metro cúbico.

Modo de escrever e de ler. — Para ler números que exprimem medidas de volume, lê-se a parte inteira, com a designação da unidade empregada e, em seguida, a decimal, com a denominação da menor unidade contida no número dado.

Exemplo. O número

125m³,006100

lê-se: cento e vinte e cinco metros cúbicos e seis mil e cem centímetros cúbicos.

Para escrever números que exprimem medidas de volume, empregam-se três algarismos para cada unidade.

Exemplo. O número 8 decâmetros cúbicos, 5 metros cúbicos, 121 decímetros cúbicos e 7 centímetros cúbicos escreve-se

8005m³,121007

Mudança de unidade. — Emprega-se a seguinte

Regra. — *Para passar um número escrito de uma para outra unidade, muda-se a vírgula* 3, 6, *etc. casas para a esquerda se a nova unidade é* 1000, 1000000, *etc. vêzes maior do que a primeira; quando for* 1000, 1000000, *etc. vêzes menor, desloca-se a vírgula* 3, 6, *etc. casas para a direita.*

Assim temos

185m³,842305 = 185842dm³,305 = 185842305cm³ e
185m³,842305 = 0dam³,185842305 = 0hm³,000185842305

Medidas efetivas. — Nas medidas de lenha e madeira de construção, emprega-se o *estério*, isto é, um cubo que tem um metro de aresta. Designa-se abreviadamente pela letra s. Os seus múltiplos e submúltiplos são decimais.

MEDIDAS DE PÊSO

Pêso e massa. — *Pêso* de um corpo é a resultante de tôdas as ações que a gravidade exerce sôbre êle.

O esfôrço que é necessário realizar no vácuo, para impedir que o corpo caia, denomina-se *pêso absoluto*. Varia de um lugar para outro do globo terrestre.

Pêso relativo é o número que indica quantas vêzes o pêso absoluto de um corpo é maior ou menor do que a unidade de pêso. Êsse pêso, para o mesmo corpo, é o mesmo em qualquer lugar da Terra.

Massa de um corpo é a quantidade de matéria que êle contém. Também é independente da situação do corpo.

O pêso relativo e a massa de um corpo são representados pelo mesmo número. As balanças, aparelhos com que determinamos o pêso dos corpos, também fornecem, pois, o valor de sua massa.

Unidade principal e secundárias. — A unidade principal das medidas de pêso é o *quilograma*.

O *quilograma* é o pêso, no vácuo, de um decímetro cúbico de água destilada na sua maior densidade (4 graus centígrados acima de zero).

Designa-se abreviadamente por *kg*.

As unidades de pêso usadas no Brasil são:

Nomes	*Abreviaturas*	*Valores*
Tonelada	t	1000 kg
quintal métrico	q	100 „
quilograma	kg	Unidade principal

Nomes	*Abreviaturas*	*Valores*	
hectograma	hg	0,1	kg
decagrama	dag	0,01	,,
grama	g	0,001	,,
decigrama	dg	0,0001	,,
centigrama	cg	0,00001	,,
miligrama	mg	0,000001	,,

Numeração. — A relação existente entre as medidas de pêso é a mesma que a das medidas de comprimento, isto é, *cada unidade de pêso é dez vêzes maior que a unidade imediatamente inferior.*

Assim,

5kg=50hg ; 8hg=80dag ; 17g=170dg

Modo de escrever e de ler. — Os números que representam unidades de pêso são escritos e lidos como os números que exprimem unidades de comprimento.

Assim, o número 48 quilogramas, 4 hectogramas, 3 decagramas e 8 gramas, escreve-se

48kg,438

O número

105kg,71

lê-se : cento e cinco quilogramas e setenta e um decagramas.

Mudança de unidade. — Realiza-se como nas medidas de comprimento.

Exemplo.

25q,2693=2526kg,93=252693dag=2526930g

Medidas efetivas. — Há três grupos de medidas efetivas, cuja forma e dimensões são determinadas por lei.

O primeiro grupo destina-se a *grandes pesadas* e é formado de 10 pesos, que vão de 50 quilogramas a 50 gramas (Fig. 3).

O segundo grupo é empregado nas *pesadas médias* e é formado de 13 pesos, que vão de 10 quilogramas a 1 grama.

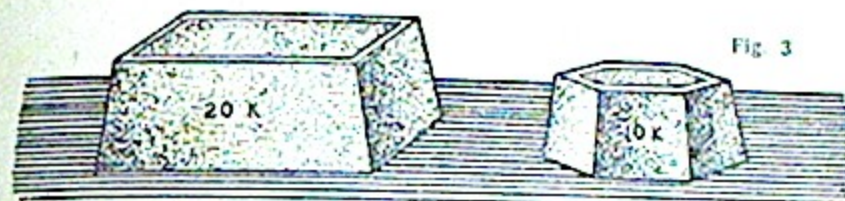
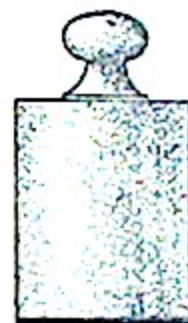



Fig. 3

Fig. 4

O terceiro grupo, usado nas *pequenas pesadas* (de precisão), consta de 9 pesos que vão de 0,5 grama até o miligrama (Fig. 4). Estas últimas pesadas são geralmente empregadas nos gabinetes e laboratórios.

Relações entre pesos e volumes. — E' fácil concluir que :

$1cm^3$ de água pura pesa aproximadamente 1g.
$1dm^3$ de água pura pesa aproximadamente 1kg.
$1m^3$ de água pura pesa aproximadamente 1t.

DENSIDADE

Os corpos não têm todos o mesmo pêso sob o mesmo volume. Um decímetro cúbico de chumbo, por exemplo, pesa mais do que um decímetro cúbico de cortiça. Daí resulta a noção de *densidade*: diz-se que o chumbo é mais denso que a cortiça.

Para comparar o pêso dos corpos, tomados com o mesmo volume, usa-se como têrmo de comparação a água destilada à temperatura de 4° centígrado acima de zero (1).

Um decímetro cúbico de água pesa 1 quilograma; se o mesmo volume de um corpo pesar 25 quilogramas, a sua *densidade* será 25. Um decímetro cúbico de ferro, p. ex., pesa 7kg,8; a densidade do ferro é, portanto, 7,8.

Portanto, *densidade* de um corpo é o número que indica quantas vêzes êsse corpo pesa mais ou menos do que o mesmo volume de água destilada, à temperatura de 4° centígrado acima de zero.

Observação. — O pêso de um corpo, em gramas, obtém-se multiplicando a densidade pelo número de cm^3 que representa o seu volume.

Assim, o pêso de $35cm^3$ de ferro será

$$7{,}8 \times 35 = 273g$$

(1) Veja *Ciências Físicas e Naturais* do mesmo autor.

MEDIDAS DE CAPACIDADE

A unidade principal de capacidade é o *litro*.

Litro é o volume ocupado por um quilograma de água pura, à temperatura de 4° centígrados, sob pressão atmosférica normal. Corresponde à capacidade de 1 decímetro cúbico, isto é, a 0,001 do metro cúbico. Representa-se abreviadamente pela letra *l*.

As unidades secundárias empregadas em nosso país são:

Nomes	*Abreviaturas*	*Valores*
Quilolitro	kl	1000 litros
hectolitro	hl	100 "
decalitro	dal	10 "
litro	l	Unidade principal
decilitro	dl	0,1 do litro
centilitro	cl	0,01 " "
mililitro	ml	0,001 " "

Numeração — A relação que existe entre as unidades de capacidade é a mesma que a das medidas de comprimento, isto é, *cada unidade de capacidade é dez vêzes maior que a unidade imediatamente inferior*.

Assim,

85hl = 850dal ; 5dal = 50l ; 7l = 70dl.

Modo de escrever e de ler. — Os números que exprimem unidades de capacidade lêem-se e escrevem-se como os que exprimem unidades de comprimento.

Dêsse modo, o número 8 litros, 5 decilitros e 4 mililitros, escreve-se

$8^l,504$

O número

$45^l,043$

lê-se: quarenta e cinco litros e quarenta e três mililitros.

Mudança de unidade. — Realiza-se como nas medidas de comprimento.

Exemplo.

$28^{kl},543 = 285^{hl},43 = 28543^l = 285430^{dl}$

Medidas efetivas. — As mais usadas são as seguintes: centilitro, duplo-centilitro, decilitro, du-

Fig. 5

plo-decilitro, meio-litro, litro (Fig. 5), duplo-litro, decalitro.

Exercícios.

MEDIDAS DE COMPRIMENTO

Ler os seguintes números:

1. 4m,8	5. 58m,45	9. 503m,485
2. 6dam,43	6. 32hm,328	10. 45km,3452
3. 8hm,435	7. 42dam,625	11. 102dam,408
4. 62km,325	8. 2km,4258	12. 204hm,5975

Escrever os seguintes números referindo-se à unidade: 1) metro; 2) centímetro; 3) decâmetro; 4) hectômetro.

1. 6 metros e 15 decímetros.
2. 8 metros e 5 centímetros.
3. 15 metros e 125 milímetros.
4. 9 decímetros.
5. 32 centímetros.
6. 725 milímetros.
7. 18 milímetros.
8. 45 centímetros.
9. 27 decímetros.
10. 1425 decímetros.
11. 985 centímetros.
12. 15 metros e 42 milímetros.
13. 8 decâmetros e 6 centímetros.
14. 25 decâmetros e 35 milímetros.
15. 5 hectômetros, 4 decâmetros e 5 metros.
16. 7 quilômetros, 6 decâmetros e 8 metros.
17. 28 decâmetros e 1825 milímetros.
18. 8 hectômetros e 7 decímetros.
19. 42 quilômetros e 18 decâmetros.
20. 6 decâmetros e 82 centímetros.

Reduzir:

a) ao metro

1. 8km,4	R. 8400m
2. 25hm,07	R. 2507m
3. 4dam,028	R. 40m,28
4. 12526cm	R. 125m,26
5. 42dm	R. 4m,2

b) ao decâmetro

6. 1804m,6	R. 180dam,46
7. 72hm,405	R. 724dam,05
8. 504km,008	R. 50400dam,8
9. 845dm,9	R. 8dam,459
10. 72cm	R. 0dam,072

c) ao hectômetro

11.	12m,75	R. 0hm,1275
12.	25dam,08	R. 2hm,508
13.	0m,058	R. 0hm,00058
14.	5km,43	R. 54hm,3
15.	8dm,32	R. 0hm,00832

d) ao decímetro

16.	2km,04	R. 20400dm
17.	52hm,22	R. 52220dm
18.	4dam,5	R. 450dm
19.	0m,05	R. 0dm,5
20.	835mm	R. 8dm,35

MEDIDAS DE SUPERFÍCIE

Ler os números seguintes:

1.	12m²,15	5.	2dam²,34	9.	0hm²,48
2.	5m²,04	6.	42dam²,0518	10.	52hm²,4235
3.	3m²,4572	7.	4dam²,70	11.	0km²,3205
4.	0m²,0506	8.	15dam,050632	12.	12km²,045234

Escrever os números seguintes, referindo-se à unidade:

1) metro quadrado; 2) decímetro quadrado; 3) decâmetro quadrado.

1. 12 metros quadrados, 32 decímetros quadrados e 14 centímetros quadrados.

2. 15 decímetros quadrados e 28 centímetros quadrados.

3. 11 metros quadrados, 18 decímetros quadrados e 5 centímetros quadrados.

4. 4 metros quadrados e 15 centímetros quadrados.

5. 8 metros quadrados e 25 milímetros quadrados.

6. 12 metros quadrados, 8 centímetros quadrados e 7 milímetros quadrados.

7. 22 metros quadrados, 4 decímetros quadrados e 128 milímetros quadrados.

8. 8 decâmetros quadrados, 4 metros quadrados e 5 centímetros quadrados.

9. 15 decâmetros quadrados e 58 centímetros quadrados.

10. 25 decâmetros quadrados e 322 milímetros quadrados.

11. 15 hectômetros quadrados e 102 metros quadrados.

12. 5 hectômetros quadrados e 325 decímetros quadrados.

13. 5 hectômetros quadrados e 25 metros quadrados.

14. 8 quilômetros quadrados e 14 metros quadrados.

15. 6 quilômetros quadrados, 9 decâmetros quadrados e 5 metros quadrados.

Reduzir:

a) ao metro quadrado

1.	4km²,4568	R. 4456800m²
2.	25hm²,32	R. 253200m²
3.	144dam²,0542	R. 14405m²,42
4.	3hm²,0045	R. 30045m²
5.	2dm²,42	R. 0m²,0242

b) ao decâmetro quadrado

6.	2km²,45	R. 24500dam²
7.	43hm²,0058	R. 4300dam²,58
8.	25m²,08	R. 0dam²,2508
9.	3249dm²,83	R. 0dam²,324983
10.	1842cm²,53	R. 0dam²,00184253

c) ao decímetro quadrado

11.	2km²,43	R. 243000000dm²
12.	5hm²,4832	R. 5483200dm²
13.	82dam,40	R. 824000dm²
14.	0m²,05	R. 5dm²
15.	52cm²,4053	R. 0dm²,524053

d) ao centímetro quadrado

16. 0km^2,5432	R. 5432000000cm^2
17. 2hm^2,48	R. 248000000cm^2
18. 0dam^2,35	R. 350000cm^2
19. 5m^2,22	R. 52200cm^2
20. 4mm^2,85	R. 0cm^2,0485

MEDIDAS AGRÁRIAS

Ler os seguintes números :

1. 15ª,8	4. 342ª,005	7. 12ª,008	10. 25ha,003
2. 8ª,153	5. 2ha,842	8. 15ha,0083	11. 8ca,5
3. 0ª,06	6. 39ha,405	9. 0ha,0042	12. 42ha,523

Escrever os números seguintes, referindo-se à unidade :

1) are ; 2) hectare ; 3) centiare.

1. 28 ares e 6 centiares.
2. 58 ares e 35 centiares.
3. 25 hectares e 15 ares.
4. 418 centiares.
5. 15 hectares e 2 centiares.
6. 5218 centiares.
7. 8 hectares, 25 ares e 12 centiares.
8. 12 ares e 8 centiares.
9. 9 hectares e 1802 centiares.
10. 42 ares e 25 centiares.

Reduzir :

a) ao hectare

1. 1425ª	R. 14ha,25
2. 358ca	R. 0ha,0358
3. 32ª,52	R. 0ha,3252
4. 0ª,425	R. 0ha,0042
5. 325ª,85	R. 3ha,2585

b) ao are

6. 425ha,7	R. 42570ª
7. 835ca,25	R. 8ª,3525
8. 0ha,543	R. 54ª,3
9. 8452ca	R. 84ª,52
10. 0ca,54	R. 0ª,0054

c) ao centiare

11. 152ª	R. 15200ca
12. 0ha,34	R. 3400ca
13. 85ª,423	R. 8542ca,3
14. 5ha,4082	R. 54082ca
15. 0ª,0032	R. 0ca,32

d) ao metro quadrado

16. 15ª	R. 1500m^2
17. 8ª,72	R. 872m^2
18. 0ª,452	R. 45m^2,2
19. 5ha,43	R. 54300m^2
20. 0ha,052	R. 520m^2

e) ao are

21. 1200m^2	R. 12ª
22. 1m^2,85	R. 0ª,0185
23. 2dam^2,42	R. 2ª,42
24. 4hm^2,28	R. 428ª
25. 8425dm^2	R. 0ª,8425

MEDIDAS DE VOLUME

Ler os seguintes números :

1. 5m^3,428	6. 5m^3,040205	11. 46hm^3,051842
2. 8m^3,006	7. 0dam^3,045	12. 25dm^3,045
3. 12m^3,385	8. 0dam^3,051205	13. 121cm^3,150
4. 0m^3,526	9. 85dam^3,546	14. 85hm^3,005042
5. 405m^3,020512	10. 42dam^3,583500	15. 7dm^3,402001

Escrever os números seguintes referindo-se à unidade :

1) metro cúbico ; 2) decâmetro cúbico ; 3) decímetro cúbico.

1. 12 metros cúbicos, 5 decímetros cúbicos e 18 milímetros cúbicos.
2. 5 metros cúbicos, 4 decímetros cúbicos e 6 centímetros cúbicos.
3. 7 metros cúbicos, 4 decímetros cúbicos e 6 centímetros cúbicos.

4. 6 decímetros cúbicos e 7 centímetros cúbicos.

5. 82 decímetros cúbicos e 15 centímetros cúbicos.

6. 9 decímetros cúbicos e 128 centímetros cúbicos.

7. 122 decímetros cúbicos, 8 centímetros cúbicos e 25 milímetros cúbicos.

8. 4 decímetros cúbicos, 102 centímetros cúbicos e 5 milímetros cúbicos.

9. 1285 decímetros cúbicos e 4 milímetros cúbicos.

10. 126 centímetros cúbicos e 32 milímetros cúbicos.

11. 15 centímetros cúbicos e 4 milímetros cúbicos.

12. 252 metros cúbicos e 258 centímetros cúbicos.

Reduzir:

a) ao metro cúbico

1. $538dam^3$ — R. $538000m^3$
2. $12dam^3,156$ — R. $12156m^3$
3. $0dam^3,058$ — R. $58m^3$
4. $52dm^3,428$ — R. $0m^3,052428$
5. $0hm^3,005832$ — R. $5832m^3$

b) ao decâmetro cúbico

6. $523m^3$ — R. $0dam^3,523$
7. $5hm^3,004$ — R. $5004dam^3$
8. $0hm^3,008405$ — R. $8dam^3,405$
9. $5284dm^3,045$ — R. $0dam^3,005284045$
10. $3dm^3,054$ — R. $0dam^3,000003054$

c) ao decímetro cúbico

11. $2m^3$ — R. $2000dm^3$
12. $5m^3,425$ — R. $5425dm^3$
13. $18dam^3,005423$ — R. $18005423dm^3$
14. $0dam^3,005832$ — R. $5832dm^3$
15. $0m^3,005832$ — R. $5dm^3,832$

MEDIDAS DE PÊSO

Ler os números seguintes:

1.	527kg,45	11.	4hg,415
2.	105dag,805	12.	50dag,002
3.	58g,402	13.	0hg,40582
4.	0hg,026	14.	0hg,005
5.	0kg,045	15.	5g,004
6.	12g,43	16.	5kg,704
7.	5dag,45	17.	12dag,7
8.	121g,4	18.	0kg,454
9.	2kg,1284	19.	145g,003
10.	52dag,008	20.	5dag,7054

Escrever os números seguintes, referindo-se à unidade:

1) quilograma; 2) decagrama; 3) grama; 4) decigrama.

1. 8 hectogramas e 2 gramas.
2. 15 decagramas e 5 decigramas.
3. 32 quilogramas e 54 gramas.
4. 25 gramas e 5 decigramas.
5. 5 decagramas, 8 gramas e 7 decigramas.
6. 8 hectogramas, 4 decigramas e 5 centigramas.
7. 12 decagramas, 5 decigramas e 8 miligramas.
8. 8 gramas, 4 centigramas e 2 miligramas.
9. 15 decigramas e 8 centigramas.
10. 9 centigramas e 4 miligramas.
11. 5 decagramas e 8 centigramas.
12. 12 gramas e 5 miligramas.
13. 7 hectogramas, 5 gramas e 8 centigramas.
14. 4 decagramas e 124 miligramas.

Reduzir:

a) ao quilograma

1. 526g — R. 0kg,526
2. 428g,7 — R. 0kg,4287

b) ao grama

6. 4kg,28 — R. 4280g
7. 0kg,428 — R. 428g

Problemas.

1. Um automóvel fez 3 corridas: uma de 683 metros; outra de 836 metros e a 3.ª de 495 metros. De quantos quilômetros e hectômetros foi o percurso total?

R. *2 quilômetros, 0 hectômetros e 14 metros.*

2. Colocando-se em seguimento os 50 palitos de uma caixa de fósforo, longos de 0m,046, atingem êles 3m de comprimento?

R. *Faltam 0m,700.*

3. De uma peça de fazenda foram vendidos 6m,85; depois 5m,195 e ainda 0m,455, e tem-se dela 875 milésimos. Qual será o comprimento primitivo em decâmetros?

R. *10 decâmetros.*

4. Uma pilha de 125 tábuas perfaz uma altura de 3m,30. Qual a espessura, em centímetros, de cada tábua?

R. *2,640 centímetros.*

5. Uma fôlha de papel almasso tem uma área de $0m^2$,0726. Em quantos quadrinhos de um milímetro quadrado se pode dividir?

R. *72600 quadrinhos.*

6. Uma propriedade consta do jardim, cuja área é de $563m^2$,45; das edificações, cuja área é de $158m^2$,4326; de um pomar, cuja área é $6762m^2$,36 e de um quintal, cuja área é de $8350m^2$,65. De quantos hectômetros e decâmetros quadrados é a área total?

R. *$1hm^2$, $58dam^2$,438926.*

7. Para o revestimento total de um terraço foram empregados 2008 ladrilhos cuja área é $0m^2$,0225. Qual é a área do terraço?

R. *$45m^2$,18.*

8. Um pedreiro pode rebocar $28m^2$,32 em 8 horas. Em 25 minutos quantos decâmetros quadrados rebocaria?

R. *$147dam^2$,50.*

9. A capacidade de um reservatório é de 3 metros cúbicos e meio. Nele já há 1934 decímetros cúbicos de água. Quanto falta para enchê-lo completamente?

R. *1566 decímetros cúbicos.*

10. A cada tijolo corresponde um volume de parede de 2646 centímetros cúbicos. Qual o volume em metros cúbicos de alvenaria de uma parede que contém 2525 tijolos?

R. *$6m^3$,681150.*

11. Pesando um litro de hidrogênio 0gr,0898, e tendo-se empregado 6735000 gramas de hidrogênio para o enchimento de um dirigível, quantos metros cúbicos foram empregados dêsse gás?

R. *$75000m^3$.*

12. Uma garrafa representa 0,75 do litro. Quantas garrafas pode encher um reservatório cheio de líquido com a capacidade de $2m^3$,400?

R. *3200 garrafas.*

13. A pressão que a atmosfera exerce sôbre a superfície de um centímetro quadrado, ao nivel do mar, é igual ao pêso do volume de $76cm^3$, de mercúrio. Qual o valor dessa pressão em quilogramas e hectogramas, considerando que $1cm^3$ de mercúrio pesa 13gr,596?

R. *1kg, 0hg 33gr, 296.*

14. Um litro de petróleo pesa 840 gramas; quantos litros são necessários para pesarem 6300kg?

R. *7500 litros.*

15. Dois litros de ouro pesando 38kg,54, quanto pesarão $12cm^3$ dêsse metal?

R. *231gr,24.*

16. Em uma das conchas de uma balança sensível colocou-se um copo e 2kg,7432. Na outra 3kg,240. Quantos centigramas pesa o copo.

R. *49680 centigramas.*

17. Um proprietário compra um terreno para, com o que já possuia, completar 4 hectares. Sendo que seus terre-

nos possuídos medem 35432m², qual a área do recém-comprado em ares?

R. *45 ares, 68 centiares.*

18. Um terreno de 720 hectares foi dividido em 64 lotes de igual área. Quantos metros quadrados tem cada lote?

R. *112500m².*

19. Quanto custa um are de um terreno de 3478m² pelo qual se deu 417$360?

R. *12$000.*

20. Qual o preço de um metro quadrado de um terreno de 5 alqueires e $\frac{3}{4}$, pelo qual se pagou 5:844$300, sabendo-se que um alqueire tem 2ha,42?

R. *42 réis.*

CAPÍTULO V

Propriedades dos números

DIVISIBILIDADE

Definições. — Chama-se *múltiplo* de um número a outro número que é o produto do primeiro por um inteiro qualquer.

Assim, 340 é múltiplo de 2, 5 e 17, pois

$340 = 2 \times 170$; $340 = 5 \times 68$; $340 = 17 \times 20$

Divisor, submúltiplo, fator ou *parte alíquota* de um número é outro número que está contido no primeiro um número inteiro de vêzes.

Assim, o número 5 é fator, divisor, ou submúltiplo do número 20, porque está contido nele 4 vêzes exatamente.

Um número é *divisível* por outro quando êste está contido no primeiro um número inteiro de vêzes.

O número 20, por exemplo, é divisível por 5, porque êste está contido nele 4 vêzes exatamente.

Para obter os múltiplos de um número, multiplica-se êsse número pela série natural dos números inteiros.

Os múltiplos do número 15, por exemplo, serão

$15 \times 1 = 15$; $15 \times 2 = 30$; $15 \times 3 = 45$; etc.

Para obter todos os divisores de um número, basta dividí-lo pelos números que lhe são menores,

a) ao quilograma		b) ao grama	
3. 32dag,04	R. 0kg,3204	8. 53dag,43	R. 534g,3
4. 528dg	R. 0kg,0528	9. 85dg,43	R. 8g,543
5. 32hg,84	R. 3kg,284	10. 0cg,453	R. 0g,00453

c) ao decigrama		d) ao decagrama	
11. 0kg,00548	R. 54dg,8	16. 0kg,045	R. 4dag,5
12. 0hg,0532	R. 53dg,2	17. 0hg,53	R. 4dag,3
13. 5dag,83	R. 583dg	18. 481g,402	R. 48dag,1402
14. 9g,05	R. 90dg,5	19. 204dg,43	R. 2dag,0443
15. 8cg,04	R. 0dg,804	20. 0cg,508	R. 0dag,000508

MEDIDAS DE CAPACIDADE

Ler os números seguintes:

1. 8l,4	6. 0dal,52	11. 4dl,5	16. 0dal,624
2. 15l,32	7. 2hl,47	12. 15l,458	17. 0hl,008
3. 12hl,8	8. 8dal,505	13. 24hl,305	18. 30hl,0524
4. 8dal,6	9. 62dal,004	14. 0dl,45	19. 0l,0542
5. 0l,38	10. 0l,005	15. 0cl,55	20. 0dal,4835

Escrever os seguintes números, referindo-se à unidade: 1) litro; 2) decalitro; 3) decilitro.

1. 5 litros e 4 decilitros.
2. 28 litros e 5 decilitros.
3. 4 litros e 24 centilitros.
4. 18 decilitros.
5. 25 centilitros.
6. 9 decilitros.
7. 4 centilitros.
8. 39 centilitros.
9. 4 litros e 126 mililitros.
10. 128 centilitros.
11. 8 decalitros e 25 centilitros.
12. 10 hectolitros e 5 litros.
13. 15 litros e 4 mililitros.
14. 6 hectolitros, 9 decalitros e 8 decilitros.

15. 5 decalitros e 128 centilitros.
16. 12 hectolitros e 425 decilitros.
17. 6 decalitros, 8 litros e 92 mililitros.
18. 15 hectolitros, 4 litros e 285 mililitros.

Reduzir:

a) ao litro		b) ao decalitro	
1. 25dal	R. 250l	6. 15hl	R. 150dal
2. 0dal,054	R. 0l,54	7. 45hl,83	R. 458dal,3
3. 2hl,42	R. 242l	8. 32l,04	R. 3dal,204
4. 425dl	R. 42l,5	9. 524dl,05	R. 5dal,2405
5. 302cl	R. 3l,02	10. 9cl,04	R. 0dal,00904

c) ao hectolitro		d) ao decilitro	
11. 23dal,526	R. 2hl,3526	16. 6hl,4	R. 6400dl
12. 1538l	R. 15hl,38	17. 0dal,405	R. 40dl,5
13. 6l	R. 0hl,06	18. 0l,008	R. 0dl,08
14. 125dal,004	R. 12hl,5004	19. 8cl,32	R. 0dl,832
15. 4508dl	R. 4hl,508	20. 42dal,005	R. 4200dl,5

e) ao metro cúbico		f) ao litro	
21. 528l	R. 0m³,528	26. 0m³,025	R. 25l
22. 42dal,05	R. 0m³,420500	27. 0m³,405823	R. 405l,823
23. 2hl,5	R. 0m³,250	28. 4m³,004	R. 4004l
24. 428dl	R. 0m³,042800	29. 8dam³,052	R. 8052000l
25. 8526cl	R. 0m³,085260	30. 0dm³,524	R. 0l,524

Dar o pêso aproximado dos seguintes volumes de àgua pura:

1. 5l	R. 5kg	6. 6dm³	R. 6kg
2. 0l,45	R. 0kg,45	7. 8m³,007	R. 8007kg
3. 5dal,6	R. 56kg	8. 0m³,458	R. 458kg
4. 0hl,42	R. 42kg	9. 89cm³,450	R. 0kg,08945
5. 8dl,05	R. 0kg,805	10. 0dam³,000500	R. 500kg

Ex.: O resto da divisão do número 3123 por 8 é 3; o resto da divisão do mesmo número por 125 é 123.

Portanto, *um número inteiro é divisível por 8 ou por 125, se o for o número representado pelos seus três últimos algarismos da direia.*

Os números 5240, 3720, etc., por exemplo, são divisíveis por 8; os números 2125, 6375, etc. por 125.

Divisibilidade por 3 e por 9. — *O resto da divisão de um número por 3 ou por 9 é o resto que se obtém dividindo por 3 ou por 9 a soma dos valores absolutos dos algarismos do número dado.*

Ex.: O resto da divisão de 7835 por 3 é o mesmo resto da divisão de 7+8+3+5 ou de 23 por 3; é, portanto, 2. O resto da divisão dêsse mesmo número por 9 é o que se obtém dividindo 7+8+3+5 ou 23 por 9, isto é, 5.

Portanto, *um número é divisível por 3 ou por 9, quando for divisível por 3 ou por 9 a soma dos valores absolutos dos seus algarismos.*

Assim, o número 7431 é divisível por 3, pois a soma 7+4+3+1 ou 15 é divisível por 3; do mesmo modo o número 594 é divisível por 9 pois 5+9+4 ou 18 é divisível por 9.

Divisibilidade por uma potência de 10. — *O resto da divisão de um número por uma potência de 10 é o número representado por tantos algarismos à direita do número proposto, quantas são as unidades do grau da potência.*

Ex.: O resto da divisão do número 8225 por 10 é 5; o resto da divisão do número 5439 por 100 é 39; etc.

Portanto, *para que um número inteiro seja divisível por uma potência de 10 é necessário que termine, pelo menos, por tantos zeros quantos são as unidades do grau da potência.*

Ex.: O número 320 é divisível por 10; 3500 e 1800 são divisíveis por 100; etc.

Divisibilidade por 11. — *O resto da divisão de um número inteiro por 11 é o que se obtém dividindo por 11 a diferença entre a soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos de ordem par.*

Assim, o resto da divisão de 6834 por 11, é o resto que resulta da divisão de (4+8)—(6+3) ou de 3 por 11; o resto, portanto, é o número 3.

Observação. — Quando a soma dos valores dos algarismos de ordem ímpar for menor que a dos valores dos algarismos de ordem par, soma-se àquela um ou mais múltiplos de 11, de modo que o resultado obtido seja maior do que a soma dos algarismos de ordem par.

Ex.: Procurando o resto da divisão do número 8471 por 11, nota-se que a soma 1+4, dos algarismos de ordem ímpar, é menor que a soma dos algarismos de ordem par. Somando à primeira soma 1+4 o número 11, teremos 16; tomando a diferença entre 16 e 15 resulta o número 1. Dividindo êste por 11, obtém-se o resto 1, que é o resultado procurado.

Portanto, *um número inteiro é divisível por 11, quando, nesse número, for divisível por 11 a diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e a dos algarismos de ordem par.*

Assim, o número 75328 é divisível por 11, pois (8+3+ +7) - (2+5) = 18 - 7 = 11 que é divisível por 11.

EXERCÍCIOS.

Determinar os restos das divisões dos números seguintes por 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 25, 100 e 125:

2057; 2358; 4522; 4800; 5784; 6502; 7925.

Indicar, dos números seguintes, os que são divisíveis por 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 25, 100 e 125:
358; 1420; 1500; 2850; 4931; 5728; 6508; 8459; 10529; 15887; 21932; 31781; 42722.

Determinar entre os que seguem, os números que são divisíveis sòmente por 3 e os que o são por 9:

129; 853; 1578; 2931; 4536; 8745; 25497.

PROVA DAS QUATRO OPERAÇÕES

As regras de que tratamos podem ser aplicadas na verificação das quatro operações sôbre os números inteiros. De tôdas elas, porém, a mais empregada é a em que se toma o divisor 9, e, por isso, denominada *prova dos nove*.

Prova da adição. — *Para verificar uma adição efetuada, divide-se por 9 cada uma das parcelas. Somam-se, em seguida, os restos obtidos, dividindo por 9 ainda o resultado caso não lhe seja inferior. Se êste resultado for igual ao resto da divisão da soma por 9, supõe-se que está certa a operação.*

Prova da subtração. — *Determinam-se os restos da divisão por 9 da diferença obtida e do subtraendo. Procura-se, em seguida, o resto da divisão por 9 da soma dos restos. Se êsse resto for igual ao da divisão do minuendo por 9, supõe-se que a operação está certa.*

Prova da multiplicação. — *Para verificar uma multiplicação efetuada, determinam-se os restos da divisão por 9 do multiplicando e do multiplicador; multiplicam-se os resultados entre si e determina-se o resto da divisão dêsse produto por 9. Se tal resto for igual ao resto da divisão do produto total por 9, admite-se que a operação está certa.*

Prova da divisão. — *Para verificar uma divisão efetuada, dividem-se por 9 o divisor e o quociente, multiplicam-se os restos encontrados e divide-se o produto obtido por 9. Ao resto desta última divisão junta-se o resto da operação e divide-se o resultado por 9. Se o resto obtido for igual ao que se obtém dividindo, por 9, o dividendo, admite-se que está certa a operação.*

Observação. — Seguindo-se a mesma marcha e aplicando os princípios dos restos, pode-se adotar outro divisor, tirando-se a *prova dos 2*, *dos 3*, *etc.*

Observem-se os seguintes exemplos:

Adição

Prova dos 9

```
 357 ...... 6 ⎫
 283 ...... 4 ⎬ 6
 608 ...... 5 ⎭
────
1248 ...... 6
```

Subtração

Prova dos 5

```
7476 ...... 1
3295 ...... 0 ⎫
────          ⎬ 1
4181 ...... 1 ⎭
```

Multiplicação

Prova dos 10

```
  578 ...... 8 ⎫ 6
   42 ...... 2 ⎭
─────
 1156
2312
─────
24276 ...... 6
```

Divisão

Prova dos 3

```
2 .... 3422 | 25 .... 1 ⎫ 1
       092  |────       ⎭
        172   136 ... 1
         22
       22+1=23 ........ 2
```

NÚMEROS PRIMOS

Chama-se *número primo* ao que sòmente é divisível por si e pela unidade.

Ex: 7, 11, 13, 23, 31, etc.

Número múltiplo é aquele que admite um ou mais divisores diferentes de si e da unidade.

Ex: 8, 10, 12, 20, 36, 50, 68, etc.

No estudo dos números primos, apresentam-se três questões:

1.ª) *Reconhecer se um número é primo.*
2.ª) *Decompor um número em seus fatores primos.*
3.ª) *Formar os divisores de um número.*

1.ª Reconhecimento dos números primos. — Regra. — *Para reconhecer se um número é primo dividimô-lo sucessivamente por cada um dos números primos, 2, 3, 5, 7, etc., na ordem natural. Se, tendo havido resto em tôdas as divisões precedentes, obtivermos um quociente igual ou menor que o divisor empregado, o número dado é primo.*

Verifiquemos se o número 311 é primo. E' necessário saber primeiro se o número dado é divisível por 2, 3, 5, etc. Os caracteres de divisibilidade mostram que o número 311 não é divisível por 2, nem por 3, nem por 5, nem por 11.

Ensaiemos, agora, a divisão dêsse número pelos números primos maiores que 11. Teremos:

```
311 | 13      311 | 17      311 | 19
051   23      141   18      121   16
 12            05            07
```

Quando se efetuou a divisão do número dado, 311, por 19, encontramos o quociente inteiro 16, menor que o divisor 19; mas, como não obtivemos divisão exata, podemos dizer imediatamente que o número dado é primo.

Verifica-se a divisibilidade do número 7 realizando a operação mentalmente.

Tábua de números primos. — Vejamos como se pode formar uma tábua de números primos desde 1 até um limite dado. Emprega-se para isso um processo denominado *crivo de Eratóstenes*, em homenagem ao filósofo grego que o idealizou.

Suponhamos que se pretende uma tabela de números primos de 1 a 80. Escrevem-se todos os números inteiros, desde 1 até 80, em sua ordem natural.

Em seguida, cancelam-se os números que forem sendo contados de 2 em 2, a partir de 2; de 3 em 3, a partir de 3; de 5 em 5, a partir de 5; de 7 em 7, a partir de 7. Dêsse modo, vão sendo suprimidos os múltiplos de 2, 3, 5 e 7. E continua-se, assim, riscando os múltiplos dos números que se seguem ao 7 e que não tenham sido suprimidos. A tábua estará pronta, quando o primeiro múltiplo, a cancelar, de um certo número, for superior a 80.

Os números que não foram cancelados são os números primos compreendidos entre 1 e 80.

1, 2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~
11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~
~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, ~~25~~, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~
31, ~~32~~, ~~33~~, ~~34~~, ~~35~~, ~~36~~, 37, ~~38~~, ~~39~~, ~~40~~
41, ~~42~~, 43, ~~44~~, ~~45~~, ~~46~~, 47, ~~48~~, ~~49~~, ~~50~~
~~51~~, ~~52~~, 53, ~~54~~, ~~55~~, ~~56~~, ~~57~~, ~~58~~, 59, ~~60~~
61, ~~62~~, ~~63~~, ~~64~~, ~~65~~, ~~66~~, 67, ~~68~~, ~~69~~, ~~70~~
71, ~~72~~, 73, ~~74~~, ~~75~~, ~~76~~, ~~77~~, ~~78~~, 79, ~~80~~

2.ª Decompor um número em seus fatores primos. — *Todo número múltiplo admite pelo menos um divisor primo diferente da unidade.*

O número 120, por exemplo, tem os seguintes divisores primos: 2, 3 e 5, diferentes de 1.

Regra. — *Para decompor um número em fatores primos, divide-se êsse número pelo seu menor divisor primo, maior do que a unidade; em seguida divide-se o quociente resultante pelo seu menor divisor primo; continua-se do mesmo modo até que se encontre um quociente igual à unidade. Os diversos divisores são os fatores primos do número procurado.*

Determinam-se os primeiros fatores sucessivos pelos caracteres de divisibilidade, e as divisões correspondentes são em geral efetuadas mentalmente.

Decomponhamos, como exemplo, o número 300 em seus fatores primos.

Êste número é divisível por 2; efetuando-se a divisão, obtém-se

$$300=2\times150$$

O quociente obtido 150 também é divisível por 2; realizando a operação, vem

$$150=2\times75$$

O número 75 é divisível por 3; praticando a divisão, tem-se

$$75=3\times25$$

O quociente obtido 25 é divisível por 5; dessa divisão resulta

$$25=5\times5$$

O último quociente obtido, 5, sendo primo, está terminada a decomposição. Êste último quociente, seguido dos

divisores precedentes, 2, 3 e 5, são os fatores primos procurados.

Assim, teremos

$$300=2\times2\times3\times5\times5 \quad \text{ou} \quad 300=2^2\times3\times5^2$$

Disposição prática. — Para mais simplicidade, adota-se na prática a disposição indicada em seguida, na qual os dividendos e quocientes sucessivos são escritos à esquerda de um traço vertical, e os diversos divisores, fatores primos procurados, colocados à direita do mesmo traço.

300	2	480	2	8580	2
150	2	240	2	4290	2
75	3	120	2	2145	3
25	5	60	2	715	5
5	5	30	2	143	11
1		15	3	13	13
		5	5	1	
		1			

Decomposição abreviada. — E' muitas vêzes possível abreviar a decomposição de certos números em fatores primos.

Decomponhamos, por exemplo, 100 em fatores primos.

Mentalmente obtemos $100=4\times25$. Mas, como 4 é 2×2 ou 2^2 e 25 é 5×5 ou 5^2, teremos

$$100=2\times2\times5\times5=2^2\times5^2$$

3.ª Formar os divisores de um número. — **Regra.** — *Para determinar todos os divisores primos e múltiplos de um número, decompõe-se êsse número em fatores primos; toma-se a unidade e as potências*

sucessivas do primeiro fator; multiplicam-se depois êsses fatores pelas potências do segundo divisor; e assim por diante, até as potências do último fator.

Na prática, adota-se a seguinte disposição:

	1	
120	2	2
60	2	4
30	2	8
15	3	3, 6, 12, 24
5	5	5, 10, 20, 40, 15
1		30, 60, 120

Número de divisores de um número. — E' possível determinar o número de divisores primos e múltiplos de um número dado, antes de formá-los.

Regra. — *O número de divisores de um número é igual ao produto que se obtém multiplicando entre si os expoentes dos fatores primos dêsse número, aumentando todos de uma unidade.*

Exemplo.

Determinar o número de divisores do número 240.
Decompondo em fatores primos, obtém-se

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5$$

Os expoentes dos fatores primos são

4, 1 e 1

Aumentando êsses expoentes de uma unidade, temos

5, 2 e 2

cujo produto é igual a 20. Êsse é, pois, o número de divisores do número 240.

EXERCÍCIOS.

Verificar se são primos os números seguintes:

1. 91 R. Não
2. 73 R. Sim
3. 89 R. Sim
4. 77 R. Não
5. 97 R. Sim
6. 157 R. Sim
7. 3167 R. Sim
8. 5213 R. Não

Decompor os números seguintes em fatores primos e dizer o número de seus divisores:

1. 4 R. $2^2 - 3$
2. 6 R. $2 \times 3 - 4$
3. 8 R. $2^3 - 4$
4. 10 R. $2 \times 5 - 4$
5. 15 R. $3 \times 5 - 4$
6. 18 R. $2 \times 3^2 - 6$
7. 20 R. $2^2 \times 5 - 6$
8. 22 R. $2 \times 11 - 4$
9. 26 R. $2 \times 13 - 4$
10. 36 R. $2^2 \times 3^2 - 9$
11. 40 R. $2^3 \times 5 - 8$
12. 45 R. $3^2 \times 5 - 6$
13. 48 R. $2^4 \times 3 - 10$
14. 72 R. $2^3 \times 3^2 - 12$
15. 90 R. $2 \times 3^2 \times 5 - 12$
16. 100 R. $2^2 \times 5^2 - 9$
17. 112 R. $2^4 \times 7 - 10$
18. 122 R. $2 \times 61 - 4$
19. 150 R. $2 \times 3 \times 5^2 - 12$
20. 180 R. $2^2 \times 3^2 \times 5 - 18$
21. 200 R. $2^3 \times 5^2 - 12$
22. 240 R. $2^4 \times 3 \times 5 - 20$
23. 300 R. $2^2 \times 3 \times 5^2 - 18$
24. 450 R. $2 \times 3^2 \times 5^2 - 18$
25. 500 R. $2^2 \times 5^3 - 12$
26. 540 R. $2^2 \times 3^3 \times 5 - 24$
27. 600 R. $2^3 \times 3 \times 5^2 - 24$
28. 780 R. $2^2 \times 3 \times 5 \times 13 - 24$
29. 800 R. $2^5 \times 5^2 - 18$
30. 820 R. $2^2 \times 5 \times 41 - 12$
31. 850 R. $2 \times 5^2 \times 17 - 12$
32. 940 R. $2^2 \times 5 \times 47 - 12$
33. 1000 R. $2^3 \times 5^3 - 16$
34. 1200 R. $2^4 \times 3 \times 5^2 - 30$
35. 1240 R. $2^3 \times 5 \times 31 - 16$
36. 1320 R. $2^3 \times 3 \times 5 \times 11 - 32$
37. 1400 R. $2^3 \times 5^2 \times 7 - 24$
38. 1500 R. $2^2 \times 3 \times 5^3 - 24$
39. 3460 R. $2^2 \times 5 \times 173 - 12$
40. 4520 R. $2^3 \times 5 \times 113 - 16$

Decompor em fatores primos e escrever os divisores na ordem de sua formação:

1. 12 R. 1, 2, 3, 4, 6 e 12
2. 15 R. 1, 3, 5 e 15
3. 18 R. 1, 2, 3, 6, 9 e 18
4. 20 R. 1, 2, 4, 5, 10 e 20

5. 24 R. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 24
6. 30 R. 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30
7. 36 R. 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36
8. 60 R. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60
9. 120 R. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60 e 120
10. 150 R. 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75 e 150

Determinar os divisores comuns dos números seguintes:

1. 90 e 120 R. 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30
2. 150 e 240 R. 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30
3. 180 e 250 R. 1, 2, 5, e 10
4. 220 e 340 R. 1, 2, 4, 5, 10 e 20
5. 845 e 1020 R. 1 e 5

MÁXIMO DIVISOR COMUM

Definição. — Dois ou mais números podem ter divisores comuns diferentes da unidade.

Os divisores dos números 12, 20 e 36, por exemplo, são:

de 12: 1, 2, 3, 4, 6 e 12
de 20: 1, 2, 4, 5, 10 e 20
de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36.

Os divisores comuns dêsses números são, portanto,

1, 2, e 4.

O maior dêles, em nosso caso o número 4, chama-se *máximo divisor comum* dos números dados.

Portanto, *máximo divisor comum de dois ou mais números é o maior número que os divide exatamente.*

Abreviatura. — Indica-se pràticamente o maior divisor comum de dois ou mais números pela abreviatura *m.d.c.* Lê-se: máximo divisor comum.

Querendo indicar, por exemplo, que 4 é o máximo divisor comum dos números 12, 20 e 36, escrevemos

m.d.c. (12, 20 e 36) = 4,

e lê-se: máximo divisor comum de 12, 20 e 36 é igual a 4.

Observação. — Quando dois ou mais números são primos entre si, o seu m.d.c. é a unidade. *Ex.:* o m.d.c. (8, 12 e 15) = 1

Determinação do m.d.c. — Na determinação do m.d.c., há dois casos a considerar:

1.º) *Determinação do m.d.c. de dois números.*

2.º) *Determinação do m.d.c. de mais de dois números.*

1.º caso. — Determinação do m.d.c. de dois números. — Na determinação do m.d.c. de dois números podem ser empregados dois processos:

1.º) *Processo das divisões sucessivas.*

2.º) *Processo da decomposição em fatores primos.*

1.º Processo das divisões sucessivas. — Determina-se o m.d.c. de dois números, por êste processo, empregando a seguinte:

Regra. — *Para determinar o m.d.c. de dois números, divide-se o maior pelo menor, e não se obtendo resto, o menor é o m.d.c. procurado. Havendo resto, divide-se o menor pelo resto obtido, em seguida o primeiro resto pelo segundo, procedendo-se do mesmo modo, até que a divisão se faça exatamente. O último divisor é o m.d.c. que se procura.*

Exemplos.

1.° Determinemos o m.d.c. de 150 e 30.
Dividindo 150 por 30, tem-se

150	30
00	5

Neste caso, resulta

m.d.c. (150 e 30)=30

2.° Procuremos o m.d.c. dos números 154 e 130. Dividindo o primeiro pelo segundo, acha-se

154	130
24	1

Como a divisão não é exata, dividimos o menor 130 pelo primeiro resto 24, e teremos

130	24
10	5

A divisão não sendo ainda exata, dividimos o primeiro resto 24 pelo segundo, e vem

24	10
4	2

Como esta última divisão também não é exata, dividimos o segundo resto 10 pelo terceiro 4, e achamos

10	4
2	2

Como a divisão ainda não é exata, dividimos 4 por 2, e resulta

4	2
0	2

Sendo exata esta última divisão, resulta que 2 é o m.d.c. procurado.

Disposição prática. — Pràticamente, dispomos a operação como está indicado abaixo, escrevendo os quocientes sucessivos sôbre os divisores empregados, e os diversos restos debaixo dos respectivos dividendos.

	1	5	2	2	2	Linha dos quocientes
154	130	24	10	4	2	Linha dos dividendos e divisores
024	10	4	2	1		Linha dos restos

2.° Processo da decomposição em fatores primos. — Para determinar o m.d.c. de dois números, por êste processo, usa-se a seguinte

Regra. — *Para determinar o m.d.c. de dois números, decompõe-se cada um dêles em seus fatores primos, e forma-se o produto dos fatores primos comuns, tomando cada um com seu menor expoente.*

Exemplos.

Determinemos, pela decomposição em fatores primos, o m.d.c. dos números 120 e 150.

Decompondo em fatores primos, tem-se

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$
$150 = 2 \times 3 \times 5^2$

Formando o produto dos fatores primos comuns, tomados respectivamente com seus menores expoentes, vem

m.d.c. (120 e 150) = $2 \times 3 \times 5 = 30$

2.° caso. — Determinação do m.d.c. de mais de dois números. — Para determinar o m.d.c. de mais de dois números podem ser empregados, ainda, os dois processos precedentes:

1.°) *Processo das divisões sucessivas.*
2.°) *Processo da decomposição em fatores primos.*

1.° Processo das divisões sucessivas. — A determinação do m.d.c. de mais de dois números, por êste processo, faz-se empregando a

Regra. — *Para determinar o m.d.c. de vários números, procura-se o m.d.c. de dois dos números dados; em seguida, procura-se o m.d.c. entre o m.d.c. achado e um terceiro número dado e assim se procede até ter considerado todos os números propostos. O último m.d.c. achado é o m.d.c. dos números dados.*

Exemplo.

Determinemos o m.d.c. dos números 250, 320 e 480

320 , 250

10 , 480

10 = m.d.c.

Determinando o m.d.c. dos números 320 e 250, encontra-se 10. Procurando-se, em seguida, o m.d.c. entre 480 e 10, acha-se 10. Assim, o número 10 é o m.d.c. dos três números dados.

2.° Processo da decomposição em fatores primos. — Determina-se o m.d.c. de mais de dois números, por êste processo, usando a mesma regra empregada no 1.° caso.

Regra. — *Para determinar o m.d.c. de mais de dois números, decompõe-se cada um dêles em seus fatores primos e forma-se o produto dos fatores primos comuns, tomando cada um com seu menor expoente.*

Exemplo.

72	2	112	2	140	2
36	2	56	2	70	2
18	2	28	2	35	5
9	3	14	2	7	7
3	3	7	7	1	
1		1			

$72 = 2^3 \times 3^2$
$112 = 2^4 \times 7$
$140 = 2^2 \times 5 \times 7$
m.d.c. (72, 112 e 140) = $2^2 = 4$

Observação. — Quando os números, entre os quais se quer determinar o m.d.c., são pequenos, o resultado pode ser obtido por um *cálculo mental.*

Exemplo. Dados os números 12, 18 e 24, é fácil verificar mentalmente que o seu maior divisor comum é 6.

Exercícios.

Determinar o m.d.c. dos seguintes números:

1.	6 e 12	**R.** 6	**5.**	80 e 14	**R.** 2
2.	26 e 13	**R.** 13	**6.**	90 e 20	**R.** 10
3.	15 e 45	**R.** 15	**7.**	92 e 28	**R.** 4
4.	75 e 25	**R.** 25	**8.**	60 e 54	**R.** 6

9.	108 e 30	**R.** 6	**20.**	40, 52 e 72	**R.** 4
10.	13 e 75	**R.** 1	**21.**	45, 60 e 80	**R.** 5
11.	140 e 80	**R.** 20	**22.**	50, 100 e 120	**R.** 10
12.	180 e 90	**R.** 90	**23.**	55, 110 e 150	**R.** 5
13.	200 e 150	**R.** 50	**24.**	70, 98 e 154	**R.** 14
14.	390 e 508	**R.** 2	**25.**	72, 120, 168 e 240	**R.** 24
15.	420 e 380	**R.** 20	**26.**	130, 150, 180 e 220	**R.** 10
16.	528 e 410	**R.** 2	**27.**	144, 180, 216 e 342	**R.** 18
17.	600 e 540	**R.** 60	**28.**	200, 275, 350 e 450	**R.** 25
18.	8, 12 e 20	**R.** 4	**29.**	190, 342, 456 e 570	**R.** 38
19.	15, 30 e 60	**R.** 5	**30.**	84, 215, 301 e 645	**R.** 1

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Múltiplo de um número é outro número, produto [illegible]rimeiro por um inteiro qualquer.

Assim, 340 é múltiplo de 2, 5 e 17, pois

$$340 = 2 \times 170 \; ; \; 340 = 5 \times 68 \; ; \; 340 = 17 \times 20$$

Múltiplo comum de dois ou mais números é outro que é múltiplo de cada um dêsses números.

Os números 6, 8 e 10, por exemplo, têm uma infinidade de múltiplos comuns. Tais são os números 120, 240, 360, etc.

Dentre êsses múltiplos, um dêles, em nosso caso 120, é o menor e denomina-se *mínimo múltiplo comum* dos números dados.

Portanto, *mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor número que é divisível exatamente por todos êsses números.*

Abreviatura. — O mínimo múltiplo comum é indicado pràticamente pela abreviatura *m.m.c.*

Exemplo.

$$120 = \text{m.m.c.} \; (6, \; 8, \; e \; 10)$$

Lê-se : 120 é o mínimo múltiplo comum de 6, 8 e 10.

Determinação do m.m.c. — Determina-se o m.m.c. de dois ou mais números empregando-se a seguinte

Regra. — *Para determinar o m.m.c. de dois ou mais números, decompõem-se em fatores primos e forma-se o produto dos fatores primos comuns e não comuns, tomando cada um dêles com o maior expoente.*

Exemplos.

1.° Procuremos, pela decomposição em fatores primos, o m.m.c. dos números 18, 60 e 130.

Decompondo em fatores primos, tem-se

18	2	60	2	130	2	$18 = 2 \times 3^2$
9	3	30	2	65	5	$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
3	3	15	3	13	13	$130 = 2 \times 5 \times 13$
1		5	5	1		
		1				

Formando o produto dos fatores primos, comuns e não comuns, tomados respectivamente com seus maiores expoentes, resulta

$$\text{m.m.c.} \; (18, 60 \; e \; 130) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 13 = 4 \times 9 \times 5 \times 13 = 2340$$

2.° Determinemos o m.m.c. dos números 30, 42 e 160.

Aplicando a regra enunciada, encontra-se

30	2	42	2	160	2	$30 = 2 \times 3 \times 5$
15	3	21	3	80	2	$42 = 2 \times 3 \times 7$
5	5	7	7	40	2	$160 = 2^5 \times 5$
1		1		20	2	
				10	2	
				5	5	
				1		

$$\text{m.m.c.} \; (30, 42 \; e \; 160) = 2^5 \times 3 \times 5 \times 7 = 32 \times 3 \times 5 \times 7 = 3360$$

Disposição prática. — Na prática, pode-se determinar o m.m.c., dando ao cálculo a seguinte *disposição*.

18, 60, 130	2
9, 30, 65	2
9, 15, 65	3
3, 5, 65	3
1, 5, 65	5
1, 1, 13	13
1, 1, 1	

m.m.c. (18, 60 e 130)$=2\times2\times3\times3\times5\times13=2340$

Observações. — 1.ª) Se dois ou mais números forem primos entre si, o m.m.c. é igual ao produto dêles.

Ex.: O m.m.c. dos números 4, 11 e 15, que são primos entre si, é $4\times11\times15=660$.

2.ª) O m.m.c. entre dois ou mais números pequenos pode ser obtido por um cálculo mental.

Ex.: Dados os números 15, 20 e 30 verifica-se mentalmente que o seu mínimo múltiplo comum é 60.

Exercícios.

Determinar o m.m.c. dos números seguintes:

1. 30 e 50 — R. 150
2. 70 e 130 — R. 910
3. 160 e 190 — R. 3040
4. 254 e 720 — R. 91440
5. 300 e 750 — R. 1500
6. 320 e 800 — R. 1600
7. 350 e 810 — R. 28350
8. 400 e 850 — R. 6800
9. 630 e 900 — R. 6300

10. 18, 22 e 26 — R. 2574
11. 50, 160 e 200 — R. 800
12. 60, 70 e 158 — R. 33180
13. 75, 90 e 204 — R. 15300
14. 15, 20, 30 e 70 — R. 420
15. 30, 40, 58 e 72 — R. 10440
16. 35, 45, 62 e 80 — R. 156240
17. 40, 50, 75 e 90 — R. 1800
18. 45, 64, 80 e 100 — R. 14400
19. 48, 60, 90, 120 e 150 — R. 3600
20. 70, 80, 100, 120 e 240 — R. 8400

CAPÍTULO VI

Frações ordinárias

PRELIMINARES

Definição. — Chama-se *fração* a uma ou mais partes iguais da unidade.

Assim, quando se divide uma laranja em quatro partes iguais, a laranja é a *unidade*, e cada partè dela será uma *fração*, denominada *quarto*.

Tomando duas dessas partes, teremos *dois quartos*; tomando as quatro partes, obteremos *quatro quartos* ou a *unidade* (laranja).

Termos da fração. — A fração é representada por dois números, *numerador* e *denominador*, colocados um sôbre o outro e separados por um traço. Êsses números se denominam *termos* da fração. O *denominador*, número escrito debaixo do traço, representa o número de partes iguais em que a unidade foi dividida. O *numerador*, número escrito acima do traço, indica quantas partes da unidade contém a fração.

A fração $\frac{5}{8}$, por exemplo, indica que a unidade foi dividida em oito partes iguais, e que a grandeza representada pela fração contém cinco dessas partes.

Modo de escrever uma fração. — Escreve-se uma fração, colocando o numerador sôbre o denominador, separados por um traço horizontal.

Exemplos.

$$\frac{4}{5}, \frac{11}{121}, \frac{4}{13}, \frac{37}{157}$$

Modo de ler uma fração. — Para ler uma fração, diz-se o numerador e, em seguida, o denominador seguido da palavra *avos.*

Assim, a fração $\frac{11}{28}$ enuncia-se: *onze vinte e oito avos.*

Observações. — 1.ª) Se o denominador da fração for 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 deve ser lido respectivamente *meio, têrço, quarto, quinto, sexto, sétimo, oitavo, nono.*

As frações $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$, por exemplo, enunciam-se respectivamente: *três meios, dois terços, três quartos* e *quatro quintos.*

2.ª) Se os denominadores são potências de dez, enuncia-se: *décimos, centésimos, milésimos,* etc.

Assim, as frações $\frac{3}{10}, \frac{7}{100}$ e $\frac{11}{1000}$ enunciam-se respectivamente: *três décimos, sete centésimos* e *onze milésimos.*

3.ª) Quando os termos de uma fração são números de vários algarismos, costuma-se também enunciar o numerador e o denominador intercalando-se a palavra *sôbre.*

A fração $\frac{45}{103}$ pode ser lida: *quarenta e cinco sôbre cento e três.*

4.ª) *O valor de uma fração depende da relação entre o numerador e o denominador.*

Há três casos a considerar:

1.º) O numerador é menor que o denominador.
2.º) O numerador é maior que o denominador.
3.º) O numerador é igual ao denominador.

No primeiro caso, a fração representa uma grandeza *menor* que a unidade; no segundo, *maior*; e, no terceiro caso, a fração representa uma grandeza *igual* à unidade.

As frações menores que a unidade chamam-se *frações próprias* ou *frações pròpriamente ditas.*

As frações iguais à unidade ou maiores que ela denominam-se *frações impróprias.* São números *inteiros* ou *mistos* representados sob a forma de fração.

Assim, $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{3}{7}$ são frações próprias; $\frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{12}{6}$ e $\frac{8}{8}$ são frações impróprias. Das últimas, a primeira e a segunda são números mistos, ao passo que a terceira é número inteiro, escrito sob a forma de fração.

Divisão inexata. — Uma fração pode ser considerada como a expressão de um *quociente,* em que o numerador e o denominador são respectivamente o dividendo e o divisor.

Inversamente, numa divisão o dividendo pode ser considerado como o numerador de uma fração cujo denominador é o divisor.

A fração $\frac{5}{8}$, por exemplo, indica o quociente de 5 por 8. Também, a divisão de 5 por 8 pode ser representada por $\frac{5}{8}$.

Daí resulta a maneira de obter o quociente completo de uma divisão inexata.

Assim, dividindo 42 por 5 resulta o quociente 8 e obtém-se 2 para o resto. Falta, porém, ainda dividir 2 por 5. O número 8 é o que se chama *quociente inteiro*, sendo o *quociente completo* $8\frac{2}{5}$.

Portanto, *quociente inteiro* é o que resulta de uma divisão inexata ; *quociente completo* é o quociente inteiro de uma divisão inexata, adicionado de uma fração cujo numerador é o resto e cujo denominador é o divisor.

Frações ordinárias e decimais. — Distinguem-se as *frações ordinárias* das *decimais*.

Ordinárias são as frações cujo denominador é um número qualquer. *Ex.* :

$$\frac{5}{7}, \frac{11}{21}, \frac{14}{30}, \frac{2}{39}$$

Decimais são especialmente as que têm para denominador uma potência de 10. *Ex.* :

$$\frac{3}{10}, \frac{23}{100}, \frac{9}{1000}, \frac{37}{10000}$$

EXERCÍCIOS.

Ler as seguintes frações, indicando se são próprias ou impróprias :

1. $\frac{3}{5}, \frac{7}{4}, \frac{8}{3}, \frac{9}{11}, \frac{13}{2}, \frac{7}{9}, \frac{5}{6}, \frac{17}{7}$
2. $\frac{4}{5}, \frac{7}{11}, \frac{13}{6}, \frac{21}{32}, \frac{7}{3}, \frac{14}{23}, \frac{5}{13}, \frac{7}{39}$
3. $\frac{7}{100}, \frac{15}{10}, \frac{47}{100}, \frac{31}{1000}, \frac{2}{10}, \frac{123}{100}, \frac{17}{100}, \frac{3417}{1000}$

PROPRIEDADES DAS FRAÇÕES ORDINÁRIAS

1.ª) *Uma fração ordinária torna-se certo número de vêzes maior, quando por êste se multiplica o numerador ou se divide o denominador.*

Assim, multiplicando o numerador da fração $\frac{11}{18}$ por 3 o resultado obtido, $\frac{33}{18}$, é *três vêzes maior* que a fração dada $\frac{11}{18}$. Dividindo-se o denominador da mesma fração $\frac{11}{18}$, por 6, resulta a fração $\frac{11}{3}$, *seis vêzes maior* do que $\frac{11}{18}$.

2.ª) *Uma fração ordinária torna-se certo número de vêzes menor, quando se divide o numerador ou se multiplica o denominador por êsse número.*

Dividindo-se, por exemplo, o numerador da fração $\frac{8}{15}$ por 4, a fração resultante, $\frac{2}{15}$, é *quatro vêzes menor* do que a primeira. Multiplicando o denominador da fração $\frac{5}{13}$ por 2, obtém-se $\frac{5}{26}$, fração *duas vêzes menor* que $\frac{5}{13}$.

3.ª) *Uma fração ordinária não se altera multiplicando ou dividindo-se ambos os seus termos pelo mesmo número diferente de zero.*

Multiplicando-se, por exemplo, os dois termos da fração $\frac{5}{7}$ por 4, obtemos a fração $\frac{20}{28}$, equivalente à primeira. Do mesmo modo, dividindo ambos os termos de $\frac{12}{15}$ por 3, teremos $\frac{4}{5}$, fração do mesmo valor.

COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES ORDINÁRIAS

Temos três casos a considerar na comparação de frações ordinárias:

1.° caso. — *As frações têm o mesmo denominador.*
2.° caso. — *As frações têm o mesmo numerador.*
3.° caso. — *As frações têm numerador e denominador respectivamente desiguais.*

1.° caso. — *Quando duas frações têm o mesmo denominador é maior aquela que tem maior numerador.*

Das frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{5}$ a segunda é a *maior*. Com efeito, a primeira indica que a unidade foi dividida em 5 partes iguais e que se tomaram 2; a segunda representa uma grandeza que contém 4 das 5 partes iguais em que a unidade foi dividida.

2.° caso. — *Quando duas frações têm o mesmo numerador é maior aquela que tem menor denominador.*

Das frações $\frac{7}{9}$ e $\frac{7}{11}$ a primeira é a *maior*. Com efeito, na primeira a unidade foi dividida em 9 partes iguais, ao passo que na segunda a divisão foi feita em 11 partes, pelo que as partes da primeira são maiores que as da segunda. Logo, as 7 partes que formam a primeira grandeza são maiores do que as 7 partes que constituem a segunda.

3.° caso. — Quando se trata de frações de *termos respectivamente diferentes* é necessário reduzí-las ao mesmo denominador ou ao mesmo numerador para em seguida compará-las. Prefere-se, porém, reduzí-las ao *mesmo denominador*.

Só em casos muito especiais pode-se fazer a comparação, sem o recurso dessa redução.

Sejam as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{9}$. Qual será a maior?

Reduzindo-as ao mesmo denominador, vem

$$\frac{3}{4} = \frac{27}{36} \text{ e } \frac{5}{9} = \frac{20}{36}$$

Como $\frac{27}{36}$ é maior do que $\frac{20}{36}$, conclue-se que $\frac{3}{4}$ é maior que $\frac{5}{9}$.

Exercícios.

Qual é a maior das frações seguintes?

1. $\frac{2}{3}$ ou $\frac{1}{3}$ R. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{4}{5}$ ou $\frac{7}{5}$ R. $\frac{7}{5}$
3. $\frac{21}{25}$ ou $\frac{13}{25}$ R. $\frac{21}{25}$
4. $\frac{23}{32}$ ou $\frac{15}{32}$ R. $\frac{23}{32}$
5. $\frac{5}{3}$ ou $\frac{5}{11}$ R. $\frac{5}{3}$
6. $\frac{7}{15}$ ou $\frac{7}{9}$ R. $\frac{7}{9}$
7. $\frac{4}{19}$ ou $\frac{4}{13}$ R. $\frac{4}{13}$
8. $\frac{9}{23}$ ou $\frac{9}{17}$ R. $\frac{9}{17}$
9. $\frac{5}{7}$ ou $\frac{4}{9}$ R. $\frac{5}{7}$
10. $\frac{3}{7}$ ou $\frac{9}{14}$ R. $\frac{9}{14}$
11. $\frac{4}{9}$ ou $\frac{7}{12}$ R. $\frac{7}{12}$
12. $\frac{5}{12}$ ou $\frac{7}{16}$ R. $\frac{7}{16}$
13. $\frac{4}{19}$ ou $\frac{7}{38}$ R. $\frac{4}{19}$
14. $\frac{5}{21}$ ou $\frac{2}{7}$ R. $\frac{2}{7}$
15. $\frac{7}{24}$ ou $\frac{11}{36}$ R. $\frac{11}{36}$
16. $\frac{5}{28}$ ou $\frac{9}{35}$ R. $\frac{9}{35}$

SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES

Simplificar uma fração é transformá-la em outra que tenha o mesmo valor e cujos termos sejam respectivamente menores que os da fração dada.

Regra. — *Para simplificar uma fração, dividem-se-lhe ambos os termos por um dos divisores comuns.*

Seja a fração

$$\frac{180}{240}$$

Dividindo ambos os termos por um divisor comum, a fração não se altera e teremos:

$$\frac{180}{240}\ \frac{180:2}{240:2} = \frac{90}{120}\ \frac{90:2}{120:2} = \frac{45}{60}\ \frac{45:3}{60:3} = \frac{15}{20}\ \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$$

As frações $\frac{90}{120}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{15}{20}$, etc., que se obtêm na divisão dos termos da fração dada, por um divisor comum, são frações *simplificadas*.

Reduzir uma fração à expressão mais simples é reduzí-la a outra equivalente, tendo os menores termos que for possível.

No exemplo acima, $\frac{3}{4}$ está *reduzida à sua expressão mais simples*, pois os seus termos são números primos entre si.

As frações que não podem ser transformadas em outras de termos menores chamam-se *irredutíveis*.

Ex.: $\frac{3}{4}$

As frações que podem ser reduzidas a outra equivalentes e de termos menores denominam-se *redutíveis*.

Ex.: $\frac{180}{240}$

Quanto menores forem os termos da fração, mais cômodos são os cálculos e com mais facilidade se apreciará a grandeza que ela representa. A redução à expressão mais simples é, portanto, uma transformação que deve ser realizada sempre que for possível.

Regra. — *Para reduzir uma fração à sua expressão mais simples, dividem-se-lhe os termos por um divisor comum; em seguida, dividem-se os termos da fração obtida por um divisor comum, e assim por diante, até resultar uma fração irredutível.*

Aplicando esta regra à fração

$$\frac{24}{36}, \text{ vem}$$

$$\frac{24}{36} = \frac{24:2}{36:2} = \frac{12:2}{18:2} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$$

Observação. — 1.ª Para facilitar as simplificações, adota-se a seguinte *disposição prática*:

$$\begin{array}{c} 2 \\ \cancel{6} \\ \cancel{12} \\ \cancel{24} \\ \hline \cancel{36} \\ \cancel{18} \\ \cancel{9} \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 3 \\ \cancel{9} \\ \cancel{18} \\ \cancel{36} \\ \cancel{72} \\ \hline \cancel{240} \\ \cancel{120} \\ \cancel{60} \\ \cancel{30} \\ 10 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 5 \\ \cancel{15} \\ \cancel{30} \\ \cancel{90} \\ \cancel{180} \\ \hline \cancel{252} \\ \cancel{126} \\ \cancel{63} \\ \cancel{21} \\ 7 \end{array}$$

Simplificar e em seguida calcular as expressões:

1. $\frac{8\times5}{4\times3\times5}$ R. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{4\times25}{8\times3\times25}$ R. $\frac{1}{6}$
3. $\frac{40\times45}{32\times81}$ R. $\frac{25}{36}$
4. $\frac{126\times40}{63\times5\times64}$ R. $\frac{1}{4}$
5. $\frac{5\times4\times60}{40\times25\times10}$ R. $\frac{3}{25}$
6. $\frac{28\times90\times36}{36\times20\times7}$ R. 18
7. $\frac{120\times30\times8\times3}{15\times8\times32\times9}$ R. $\frac{5}{2}$
8. $\frac{36\times14\times15\times9}{252\times7\times6\times12}$ R. $\frac{15}{28}$

REDUÇÃO DE FRAÇÕES AO MESMO DENOMINADOR

Reduzir frações ao mesmo denominador é convertê-las em outras equivalentes, que sejam dotadas do mesmo denominador.

Essa redução é empregada para reduzir frações à mesma *espécie*.

Regra. — *Para reduzir frações ao mesmo denominador, multiplicam-se os termos de cada uma pelo produto dos denominadores das outras.*

Sejam as frações

$$\frac{5}{6},\ \frac{6}{7}\ \text{e}\ \frac{7}{8}$$

Multiplicando-se ambos os termos da primeira por 7×8, os da segunda por 6×8 e os da última por 6×7, vem

$$\frac{5\times7\times8}{6\times7\times8},\ \frac{6\times6\times8}{7\times6\times8}\ \text{e}\ \frac{7\times6\times7}{8\times6\times7}$$

Essas frações são equivalentes às três primeiras, pois quando se multiplicam os dois termos de uma fração por um número, obtém-se uma fração equivalente à fração dada.

Teremos portanto

$$\frac{280}{336},\ \frac{288}{336}\ \text{e}\ \frac{294}{336}$$

tôdas com o mesmo denominador e respectivamente equivalentes às frações dadas

$$\frac{5}{6},\ \frac{6}{7}\ \text{e}\ \frac{7}{8}$$

E' fácil notar que há uma infinidade de grupos de frações equivalentes a outras dadas, tendo o mesmo denominador. E' conveniente que o denominador comum seja o menor possível. Assim, as frações devem ser *reduzidas ao mínimo denominador comum.*

Regra. — *Para reduzir frações ao mínimo denominador comum, reduzem-se à expressão mais simples e acha-se o m.m.c. dos denominadores; em seguida, multiplica-se cada numerador pelo quociente da divisão do m.m.c. pelo respectivo denominador, e toma-se êsse m.m.c. para denominador comum.*

Exemplo.

Reduzir ao mínimo denominador comum as frações

$$\frac{3}{60},\ \frac{22}{80}\ \text{e}\ \frac{14}{32}$$

Reduzindo à expressão mais simples, teremos

$$\frac{1}{20},\ \frac{11}{40}\ \text{e}\ \frac{7}{16}$$

O m.m.c. de 20, 40 e 16 é 80.

De acôrdo com a regra acima, vem

$$\frac{4\times1}{80}, \frac{2\times11}{80}, \frac{5\times7}{80},$$

e efetuando

$$\frac{4}{80}, \frac{22}{80} \text{ e } \frac{35}{80}$$

EXERCÍCIOS.

Reduzir ao m.d.c. as seguintes frações:

1. $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{4}$ — **R.** $\frac{8}{12}$ e $\frac{15}{12}$

2. $\frac{3}{7}$ e $\frac{2}{8}$ — **R.** $\frac{12}{28}$ e $\frac{7}{28}$

3. $\frac{7}{9}$ e $\frac{4}{15}$ — **R.** $\frac{35}{45}$ e $\frac{12}{45}$

4. $\frac{3}{15}, \frac{7}{18}$ e $\frac{9}{20}$ — **R.** $\frac{36}{180}, \frac{70}{180}$ e $\frac{81}{180}$

5. $\frac{17}{36}, \frac{11}{72}$ e $\frac{13}{120}$ — **R.** $\frac{170}{360}, \frac{55}{360}$ e $\frac{39}{360}$

6. $\frac{4}{16}, \frac{5}{30}, \frac{1}{72}$ e $\frac{7}{36}$ — **R.** $\frac{18}{72}, \frac{12}{72}, \frac{1}{72}$ e $\frac{14}{72}$

7. $\frac{1}{100}, \frac{7}{120}, \frac{1}{160}$ e $\frac{13}{240}$ — **R.** $\frac{24}{2400}, \frac{140}{2400}, \frac{15}{2400}$ e $\frac{1300}{2400}$

CONVERSÃO DE UM NÚMERO MISTO EM FRAÇÃO IMPRÓPRIA

Regra. — *Para converter um número misto à fração imprópria, multiplica-se o inteiro pelo denominador, soma-se o produto ao numerador e dá-se a essa soma o denominador da fração.*

Exemplo. Reduzir o número misto $3\frac{5}{8}$ à fração imprópria.

Multiplica-se 3 por 8 e obtemos 24, a que se soma 5, donde resulta 29. Êste número é o numerador e 8 o denominador da fração procurada.

$$3\frac{5}{8}=\frac{3\times8+5}{8}=\frac{24+5}{8}=\frac{29}{8}$$

Um número inteiro pode ser escrito sob a forma de fração, tendo a unidade como denominador. Assim, o inteiro 8 pode ser escrito

$$\frac{8}{1}$$

Um número inteiro pode adquirir forma fracionária com qualquer denominador, bastando que o numerador seja o produto de ambos.

Exemplo. Pôr o número 7 sob a forma de fração que tenha 12 por denominador.

Multiplica-se 7 por 12 e obtém-se 84. Êste é o numerador da fração e 12, o denominador.

$$7=\frac{7\times12}{12}=\frac{84}{12}$$

CONVERSÃO DE UMA FRAÇÃO IMPRÓPRIA EM NÚMERO INTEIRO OU MISTO

Regra. — *Para converter uma fração imprópria em número inteiro ou misto, efetua-se a divisão do numerador pelo denominador. Havendo resto, completa-se o quociente com uma fração tendo para numerador o resto da divisão e para denominador o divisor.*

Exemplos.

1.º) Transformar $\frac{180}{12}$ em número inteiro ou misto.

$$\frac{180}{12} = 180 \div 12 = 15$$

2.º) Converter $\frac{235}{15}$ em número inteiro ou misto.

$$\frac{235}{15} = 235 \div 15 = 15\frac{10}{15} = 15\frac{2}{3}$$

EXERCÍCIOS.

Reduzir a frações impróprias os seguintes números mistos.

1. $2\frac{1}{4}$	**R.** $\frac{9}{4}$	**4.** $8\frac{4}{7}$	**R.** $\frac{60}{7}$
2. $4\frac{2}{3}$	**R.** $\frac{14}{3}$	**5.** $11\frac{2}{9}$	**R.** $\frac{101}{9}$
3. $6\frac{3}{5}$	**R.** $\frac{33}{5}$	**6.** $13\frac{1}{12}$	**R.** $\frac{157}{12}$

7. $15\frac{9}{17}$	**R.** $\frac{264}{17}$	**9.** $27\frac{4}{23}$	**R.** $\frac{625}{23}$
8. $21\frac{1}{19}$	**R.** $\frac{400}{19}$	**10.** $39\frac{12}{27}$	**R.** $\frac{1065}{27}$

Reduzir a números mistos as seguintes frações impróprias:

1. $\frac{27}{8}$	**R.** $3\frac{3}{8}$	**6.** $\frac{158}{21}$	**R.** $7\frac{11}{21}$
2. $\frac{25}{4}$	**R.** $6\frac{1}{4}$	**7.** $\frac{254}{23}$	**R.** $11\frac{1}{23}$
3. $\frac{103}{11}$	**R.** $9\frac{4}{11}$	**8.** $\frac{1381}{7}$	**R.** $197\frac{2}{7}$
4. $\frac{127}{92}$	**R.** $1\frac{35}{92}$	**9.** $\frac{3458}{21}$	**R.** $164\frac{2}{3}$
5. $\frac{47}{5}$	**R.** $9\frac{2}{5}$	**10.** $\frac{5423}{98}$	**R.** $55\frac{33}{98}$

Transformar os números seguintes em frações:

1. Em meios: 5, 7, 9 **R.** $\frac{10}{2}, \frac{14}{2}, \frac{18}{2}$

2. Em terços: 2, 3, 5 **R.** $\frac{6}{3}, \frac{9}{3}, \frac{15}{3}$

3. Em quartos: 15, 20, 25 **R.** $\frac{60}{4}, \frac{80}{4}, \frac{100}{4}$

OPERAÇÕES SÔBRE FRAÇÕES

Adição. — Temos três casos a considerar na adição de frações ordinárias:

1.º) Adição de frações de mesmo denominador.

2.º) Adição de frações de denominadores diferentes.

3.º) Adição de números mistos.

1.º caso. — *As frações têm o mesmo denominador.*

Regra. — *Para somar frações com denominadores iguais, somam-se os numeradores e dá-se ao total o mesmo denominador.*

Exemplo.

Seja a soma indicada

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{2}{8}$$

Aplicando a regra, vem

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{2}{8}=\frac{10}{8}=1\frac{1}{4}$$

2.º caso. — *As frações têm denominadores diferentes.*

Regra. — *Para somar frações de denominadores diferentes, reduzem-se ao mesmo denominador, depois somam-se os numeradores das frações obtidas e escreve-se o resultado como numerador de uma fração cujo denominador é o denominador comum das frações dadas.*

Exemplo.

Seja a adição indicada

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{15}+\frac{3}{8}$$

Aplicando a regra, obtém-se

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{15}+\frac{3}{8}=\frac{20}{120}+\frac{16}{120}+\frac{45}{120}=\frac{81}{120}=\frac{27}{40}$$

3.º caso. — *Adição de números mistos.*

Regra. — *Para somar números mistos, adicionam-se primeiramente as frações, depois os inteiros, juntando a estes os inteiros que resultarem da soma das referidas frações.*

Exemplos.

Consideremos a soma indicada

$$3\frac{4}{5}+2\frac{5}{6}$$

De acôrdo com a regra enunciada, tem-se

$$3\frac{4}{5}+2\frac{5}{6}=3+2+\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{6}\right)=3+2+\left(\frac{24}{30}+\frac{25}{30}\right)=3+2+\frac{49}{30}=$$

$$=(3+2+1)+\frac{19}{30}=6\frac{19}{30}$$

Obteríamos o mesmo resultado, reduzindo os números mistos a frações impróprias e aplicando depois uma das duas primeiras regras.

No exemplo citado, teríamos

$$3\frac{4}{5}+2\frac{5}{6}=\frac{19}{5}+\frac{17}{6}=\frac{114}{30}+\frac{85}{30}=\frac{199}{30}=6\frac{19}{30}$$

EXERCÍCIOS.

Efetuar as operações seguintes:

1. $\frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}$ R. $1\frac{4}{5}$

2. $\frac{5}{12}+\frac{7}{12}+\frac{1}{12}$ R. $1\frac{1}{12}$

3. $\frac{4}{29}+\frac{7}{29}+\frac{9}{29}+\frac{3}{29}$ R. $\frac{23}{29}$

4. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ R. $1\frac{5}{12}$

5. $\frac{2}{5}+\frac{4}{7}$ R. $\frac{34}{35}$

6. $\frac{4}{13}+\frac{3}{11}$ R. $\frac{83}{143}$

7. $\frac{2}{5}+\frac{5}{8}+\frac{3}{4}$ R. $1\frac{31}{40}$

8. $\frac{4}{15}+\frac{7}{12}+\frac{5}{24}$ R. $1\frac{7}{120}$

9. $\frac{7}{18}+\frac{5}{12}+\frac{11}{36}+\frac{13}{45}$ R. $1\frac{2}{5}$

10. $\frac{4}{7}+\frac{5}{21}+\frac{9}{14}+\frac{17}{42}$ R. $1\frac{6}{7}$

11. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$ R. $1\frac{1}{8}$

12. $\frac{3}{14}+\frac{5}{12}+\frac{5}{6}+\frac{3}{22}$ R. $1\frac{185}{308}$

13. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{7}{15}+\frac{11}{30}+\frac{5}{24}$ R. $2\frac{61}{120}$

14. $\frac{13}{15}+\frac{7}{10}+\frac{3}{9}+\frac{5}{16}+\frac{3}{4}$ R. $2\frac{77}{80}$

15. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$ R. $1\frac{11}{40}$

16. $2\frac{1}{4}+4\frac{1}{2}$ R. $6\frac{3}{4}$

17. $3\frac{2}{5}+5\frac{1}{20}+\frac{3}{10}$ R. $8\frac{3}{4}$

18. $4\frac{1}{8}+2\frac{3}{32}+\frac{5}{16}$ R. $6\frac{17}{32}$

19. $2\frac{7}{30}+\frac{5}{32}+3+\frac{1}{8}+5$ R. $10\frac{247}{480}$

20. $11+\frac{4}{5}+3\frac{3}{8}+2\frac{1}{20}+\frac{5}{48}$ R. $17\frac{79}{240}$

21. $2\frac{1}{3}+1\frac{4}{7}+5+2\frac{3}{14}+\frac{9}{50}$ R. $11\frac{157}{525}$

22. $\frac{1}{9}+3\frac{7}{18}+4\frac{1}{30}+8+2\frac{1}{4}+\frac{7}{20}$ R. $18\frac{2}{15}$

Subtração. — A subtração de frações ordinárias apresenta quatro casos:

1.º) Subtração de frações de mesmo denominador.

2.º) Subtração de frações de denominadores diferentes.

3.º) Subtração de uma fração a um inteiro.

4.º) Subtração de números mistos.

1.º caso. — *As frações têm o mesmo denominador.*

Regra. — *Para subtrair frações de denominador comum, subtraem-se os numeradores e escreve-se o resultado sôbre o denominador comum das frações dadas.*

Exemplo.

Seja a subtração indicada

$$\frac{7}{12}-\frac{5}{12}$$

Aplicando a regra, obtém-se

$$\frac{7}{12}-\frac{5}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

2.º caso. — *As frações têm denominadores diferentes.*

Regra. — *Para subtrair frações de denominadores diferentes, reduzem-se ao mesmo denominador, subtraem-se os numeradores das frações obtidas e dá-se à diferença o denominador comum das frações dadas.*

Exemplos.

1.º) Seja a diferença indicada

$$\frac{11}{18}-\frac{5}{12}$$

De acôrdo com a regra enunciada, encontraremos

$$\frac{11}{18}-\frac{5}{12}=\frac{22}{36}-\frac{15}{36}=\frac{7}{36}$$

2.º

$$\frac{11}{15}-\frac{13}{30}=\frac{22}{30}-\frac{13}{30}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$$

3.º caso. — *Subtração de uma fração de um inteiro.*

Regra. — *Para subtrair uma fração de um inteiro, multiplica-se o inteiro pelo denominador da fração dada, subtrai-se dêsse produto o numerador e dá-se à diferença o denominador da fração considerada.*

Exemplos.

1.º) Seja a subtração indicada

$$5-\frac{3}{4}$$

Encontraremos

$$5-\frac{3}{4}=\frac{20-3}{4}=\frac{17}{4}=4\frac{1}{4}$$

2.º)

$$4-\frac{5}{6}=\frac{24-5}{6}=\frac{19}{6}=3\frac{1}{6}$$

4.º caso. — *Subtração de números mistos.*

Regra. — *Para subtrair números mistos, reduzem-se a frações impróprias os números dados e subtraem-se, em seguida, as frações obtidas.*

Exemplos.

1.º) Seja a diferença indicada.

$$5\frac{2}{3}-2\frac{4}{5}$$

Aplicando a regra, tem-se

$$5\frac{2}{3}-2\frac{4}{5}=\frac{17}{3}-\frac{14}{5}=\frac{85}{15}-\frac{42}{15}=\frac{43}{15}=2\frac{13}{15}$$

2.°)

$$7\frac{1}{8}-2\frac{1}{4}=\frac{57}{8}-\frac{18}{8}=\frac{39}{8}=4\frac{7}{8}$$

Exercícios.

Efetuar as seguintes subtrações:

1. $\frac{3}{8}-\frac{1}{8}$ **R.** $\frac{1}{4}$
2. $\frac{7}{11}-\frac{4}{11}$ **R.** $\frac{3}{11}$
3. $\frac{11}{18}-\frac{7}{18}$ **R.** $\frac{2}{9}$
4. $\frac{17}{21}-\frac{10}{21}$ **R.** $\frac{1}{3}$
5. $\frac{3}{8}-\frac{1}{4}$ **R.** $\frac{1}{8}$
6. $\frac{7}{12}-\frac{5}{24}$ **R.** $\frac{3}{8}$
7. $\frac{5}{6}-\frac{5}{12}$ **R.** $\frac{5}{12}$
8. $\frac{11}{12}-\frac{7}{40}$ **R.** $\frac{89}{120}$
9. $\frac{3}{16}-\frac{5}{32}$ **R.** $\frac{1}{32}$
10. $4-\frac{2}{7}$ **R.** $3\frac{5}{7}$
11. $8-\frac{11}{24}$ **R.** $7\frac{13}{24}$
12. $14-\frac{3}{4}$ **R.** $13\frac{1}{4}$
13. $3\frac{5}{8}-\frac{3}{4}$ **R.** $2\frac{7}{8}$
14. $7\frac{3}{5}-2\frac{7}{15}$ **R.** $5\frac{2}{15}$
15. $8\frac{5}{6}-3\frac{7}{12}$ **R.** $5\frac{1}{4}$
16. $9\frac{13}{16}-4\frac{5}{32}$ **R.** $5\frac{21}{32}$
17. $11\frac{5}{9}-10\frac{1}{18}$ **R.** $1\frac{1}{2}$
18. $6\frac{17}{25}-4\frac{7}{20}$ **R.** $2\frac{33}{100}$

Multiplicação. — Quatro são os casos que se nos apresentam na multiplicação de frações:

1.°) Multiplicação de uma fração por um inteiro.
2.°) Multiplicação de um inteiro por uma fração.
3.°) Multiplicação de uma fração por outra fração.
4.°) Multiplicação de dois números mistos.

1.° caso. — *Multiplicação de uma fração por um inteiro.*

Regra. — *Para multiplicar uma fração por um inteiro, multiplica-se o numerador pelo inteiro, e dá-se ao produto o mesmo denominador.*

Exemplos.

1.°)

$$\frac{7}{18}\times5=\frac{7\times5}{18}=\frac{35}{18}=1\frac{17}{18}$$

2.°)

$$\frac{3}{11}\times8=\frac{3\times8}{11}=\frac{24}{11}=2\frac{2}{11}$$

2.° caso. — *Multiplicação de um número inteiro por uma fração.*

Regra. — *Para multiplicar um inteiro por uma fração, multiplica-se o inteiro pelo numerador da fração, e dá-se ao produto o mesmo denominador.*

Exemplos.

1.°) Seja o produto indicado

$$3\times\frac{4}{15}$$

Multiplicando-se 3 por 4, obtém-se o produto 12. Dando-se a êste o denominador 15, obtém-se a fração $\frac{12}{15}$ que, simplificada, dá $\frac{4}{5}$.

$$3 \times \frac{4}{15} = \frac{3 \times 4}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

2.°)

$$7 \times \frac{11}{13} = \frac{7 \times 11}{13} = \frac{77}{13} = 5\frac{12}{13}$$

3.° caso. — *Multiplicação de uma fração por outra fração.*

Regra. — *Para multiplicar entre si duas frações, forma-se nova fração cujo numerador será o produto dos numeradores e cujo denominador será o produto dos denominadores das frações dadas.*

Exemplos.

1.°) Seja o produto indicado

$$\frac{3}{7} \times \frac{14}{15}$$

Multiplicando os numeradores 3 e 14, obtém-se 42, que é o numerador da fração produto; multiplicando os denominadores 7 e 15, obtém-se 105, denominador da fração procurada $\frac{42}{105}$, que simplificada, dá $\frac{2}{5}$.

$$\frac{3}{7} \times \frac{14}{15} = \frac{3 \times 14}{7 \times 15} = \frac{42}{105} = \frac{2}{5}$$

2.°)

$$\frac{3}{9} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{9 \times 6} = \frac{5}{18}$$

4.° caso. — *Multiplicação de dois números mistos.*

Regra. — *Para multiplicar dois números mistos basta reduzi-los a frações impróprias e multiplicar as frações resultantes.*

Exemplos.

1.°) Seja o produto

$$2\frac{3}{5} \times 3\frac{5}{7}$$

Reduzindo a fração imprópria os números mistos dados obtêm-se as frações $\frac{13}{5}$ e $\frac{26}{7}$, que, multiplicadas segundo a regra conhecida, dão a fração $\frac{338}{35}$. Extraindo os inteiros, encontra-se $9\frac{23}{35}$.

$$2\frac{3}{5} \times 3\frac{5}{7} = \frac{13}{5} \times \frac{26}{7} = \frac{338}{35} = 9\frac{23}{35}$$

2.°)

$$4\frac{3}{8} \times 2\frac{4}{5} = \frac{35}{8} \times \frac{14}{5} = \frac{490}{40} = 12\frac{1}{4}$$

Observações. — 1.ª) A multiplicação de fração por inteiro, comporta, às vêzes, uma *simplificação: Se o denominador for exatamente divisível pelo inteiro, o quociente obtido será denominador do produto, cujo numerador será o mesmo.*

Exemplos.

1.°)

$$\frac{5}{12} \times 6 = \frac{5}{12 \div 6} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

2.°)

$$\frac{7}{18} \times 9 = \frac{7}{18 \div 9} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$

2.ª) Tem lugar a mesma *simplificação* quando se multiplica inteiro por fração.

Exemplos.

1.º)

$$3\times\frac{5}{6}=\frac{5}{6\div3}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$$

2.º)

$$4\times\frac{7}{24}=\frac{7}{24\div4}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$$

3.ª) *Para multiplicar entre si diversas frações, forma-se nova fração cujo numerador será o produto dos numeradores e cujo denominador será o produto dos denominadores das frações dadas.*

Exemplo.

$$\frac{7}{9}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{7\times5\times3}{9\times7\times8}=\frac{105}{504}=\frac{5}{24}$$

4.ª) *Para multiplicar vários números mistos, basta reduzí-los a frações impróprias e multiplicar as frações obtidas.*

Exemplo.

$$2\frac{3}{4}\times1\frac{2}{3}\times5\frac{3}{8}=\frac{11}{4}\times\frac{5}{3}\times\frac{43}{8}=\frac{2365}{96}=24\frac{61}{96}$$

5.ª) Chama-se *fração de frações* a uma ou mais partes de uma fração.

Exemplo.

$$\frac{1}{3}\text{ de }\frac{5}{8}$$

Regra. — *Para calcular uma fração de frações basta multiplicá-las entre si.*

Exemplos.

1.º)

$$\frac{3}{4}\text{ de }\frac{4}{7}=\frac{3}{4}\times\frac{4}{7}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$$

2.º)

$$\frac{5}{8}\text{ de }\frac{1}{6}\text{ de }18=\frac{5}{8}\times\frac{1}{6}\times18=\frac{5\times1\times18}{8\times6}=\frac{90}{48}=1\frac{7}{8}$$

EXERCÍCIOS.

Efetuar as seguintes multiplicações:

1. $\frac{3}{5}\times7$ R. $4\frac{1}{5}$
2. $\frac{5}{12}\times4$ R. $1\frac{2}{3}$
3. $\frac{7}{13}\times5$ R. $2\frac{9}{13}$
4. $5\times\frac{4}{9}$ R. $2\frac{2}{9}$
5. $9\times\frac{7}{24}$ R. $2\frac{5}{8}$
6. $12\times\frac{7}{48}$ R. $1\frac{3}{4}$
7. $5\times\frac{2}{23}$ R. $\frac{10}{23}$
8. $15\times\frac{11}{45}$ R. $3\frac{2}{3}$
9. $\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}$ R. $\frac{12}{35}$
10. $\frac{5}{12}\times\frac{36}{25}$ R. $\frac{3}{5}$
11. $\frac{7}{15}\times\frac{5}{21}$ R. $\frac{1}{9}$
12. $\frac{81}{125}\times\frac{25}{9}$ R. $1\frac{4}{5}$
13. $5\frac{3}{8}\times11$ R. $59\frac{1}{8}$
14. $12\times3\frac{5}{7}$ R. $44\frac{4}{7}$

15. $\frac{15}{19}\times4\frac{3}{25}$	R. $3\frac{24}{95}$	19. $\frac{4}{7}\times\frac{7}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$	R. $\frac{2}{5}$
16. $3\frac{5}{18}\times2\frac{22}{25}$	R. $8\frac{6}{25}$	20. $2\frac{1}{5}\times\frac{5}{8}\times2\frac{3}{11}$	R. $3\frac{1}{8}$
17. $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}$	R. $\frac{1}{84}$	21. $4\frac{2}{3}\times2\frac{3}{7}\times5\frac{1}{4}$	R. $58\frac{1}{2}$
18. $\frac{3}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}$	R. $\frac{3}{7}$	22. $1\frac{1}{3}\times3\frac{3}{4}\times3\frac{5}{9}\times1\frac{5}{6}$	R. $39\frac{1}{9}$

Divisão. — Na divisão de frações apresentam-se quatro casos:

1.º) Divisão de uma fração por outra fração.

2.º) Divisão de uma fração por um número inteiro.

3.º) Divisão de um número inteiro por uma fração.

4.º) Divisão de dois números mistos.

1.º caso. — *Divisão de uma fração por outra fração.*

Regra. — *Para dividir uma fração por outra, multiplica-se a primeira pela segunda invertida.*

Inverter uma fração é passar o numerador para denominador e o denominador para numerador.

Exemplos.

1.º) Seja a divisão indicada

$$\frac{3}{5}\div\frac{7}{9}$$

Invertendo a segunda fração $\frac{7}{9}$, obtém-se $\frac{9}{7}$. Multiplicando a primeira $\frac{3}{5}$ por $\frac{9}{7}$, resulta a fração $\frac{27}{35}$, que é o quociente procurado.

$$\frac{3}{5}\div\frac{7}{9}=\frac{3}{5}\times\frac{9}{7}=\frac{27}{35}$$

2.º)

$$\frac{3}{5}\div\frac{6}{7}=\frac{3}{5}\times\frac{7}{6}=\frac{21}{30}=\frac{7}{10}$$

2.º caso. — *Divisão de uma fração por um número inteiro.*

Regra. — *Para dividir uma fração por um inteiro, reduz-se o inteiro à forma de fração e divide-se a fração dada pela fração resultante daquela redução.*

Exemplos.

1.º) Seja a divisão indicada

$$\frac{5}{8}\div3$$

Dando ao inteiro a forma de fração, obtém-se $\frac{3}{1}$.

Dividindo a fração dada $\frac{5}{8}$ pela fração obtida $\frac{3}{1}$, obtém-se a fração $\frac{5}{24}$, que é o quociente procurado.

$$\frac{5}{8}\div3=\frac{5}{8}\div\frac{3}{1}=\frac{5}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{24}$$

2.º)

$$\frac{8}{9}\div2=\frac{8}{9}\div\frac{2}{1}=\frac{8}{9}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$$

3.º caso. — *Divisão de um número inteiro por uma fração.*

Regra. — *Para dividir um inteiro por uma fração, reduz-se o inteiro à forma de fração e divide-se a fração obtida pela fração dada.*

Exemplos.

1.º) Seja a divisão indicada

$$7 \div \frac{3}{5}$$

Reduzindo o inteiro à forma de fração, tem-se $\frac{7}{1}$. Dividindo a fração obtida $\frac{7}{1}$ pela fração dada $\frac{3}{5}$, obtém-se a fração $\frac{35}{3}$, que representa o resultado procurado.

$$7 \div \frac{3}{5} = \frac{7}{1} \div \frac{3}{5} = \frac{7}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$$

2.º)

$$8 \div \frac{3}{4} = \frac{8}{1} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

4.º caso. — *Divisão de dois números mistos.*

Regra. — *Para dividir dois números mistos, basta reduzí-los a frações impróprias e dividir as frações obtidas.*

Exemplos.

1.º) Seja a divisão

$$2\frac{3}{5} \div 1\frac{5}{6}$$

Reduzindo os números mistos à denominação de fração, resultam as frações $\frac{13}{5}$ e $\frac{11}{6}$ respectivamente. Dividindo a primeira pela segunda, obtém-se a fração $\frac{78}{55}$. Extraindo os inteiros, resulta $1\frac{23}{55}$, que é o quociente da divisão dada.

$$2\frac{3}{5} \div 1\frac{5}{6} = \frac{13}{5} \div \frac{11}{6} = \frac{13}{5} \times \frac{6}{11} = \frac{78}{55} = 1\frac{23}{55}$$

2.º)

$$3\frac{1}{7} \div 1\frac{2}{5} = \frac{22}{7} \div \frac{7}{5} = \frac{22}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{110}{49} = 2\frac{12}{49}$$

EXERCÍCIOS.

Efetuar as seguintes operações:

1. $\frac{8}{11} \div 2$ — R. $\frac{4}{11}$
2. $\frac{7}{13} \div 3$ — R. $\frac{7}{39}$
3. $\frac{21}{29} \div 7$ — R. $\frac{3}{29}$
4. $\frac{4}{15} \div 8$ — R. $\frac{1}{30}$
5. $10 \div \frac{2}{5}$ — R. 25
6. $15 \div \frac{1}{4}$ — R. 60
7. $13 \div \frac{3}{7}$ — R. $30\frac{1}{3}$
8. $18 \div \frac{6}{7}$ — R. 21
9. $\frac{1}{2} \div \frac{1}{5}$ — R. $2\frac{1}{2}$
10. $\frac{2}{3} \div \frac{5}{6}$ — R. $\frac{4}{5}$
11. $\frac{5}{7} \div \frac{4}{9}$ — R. $1\frac{17}{28}$
12. $\frac{8}{21} \div \frac{4}{7}$ — R. $\frac{2}{3}$
13. $\frac{10}{17} \div \frac{20}{31}$ — R. $\frac{31}{34}$
14. $12 \div 3\frac{3}{4}$ — R. $3\frac{1}{5}$

15. $15 \div 3\frac{1}{6}$ R. $4\frac{14}{19}$

16. $24 \div 4\frac{4}{5}$ R. 5

17. $4\frac{2}{5} \div 11$ R. $\frac{2}{5}$

18. $3\frac{7}{9} \div 17$ R. $\frac{2}{9}$

19. $2\frac{5}{7} \div 4\frac{2}{9}$ R. $\frac{9}{14}$

20. $5\frac{4}{15} \div 2\frac{19}{30}$ R. 2

21. $5\frac{3}{8} \div \frac{5}{8}$ R. $8\frac{3}{5}$

22. $15\frac{5}{7} \div 2\frac{4}{11}$ R. $6\frac{59}{91}$

CÁLCULO DE EXPRESSÕES FRACIONÁRIAS

Exemplos.

1. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times2+15\div\frac{3}{5}-\frac{1}{8}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{15}{1}\times\frac{5}{3}-\frac{4}{40}=\frac{1}{2}-$
$-\frac{1}{2}+\frac{25}{1}-\frac{1}{10}=\frac{5}{10}-\frac{5}{10}+\frac{250}{10}-\frac{1}{10}=\left(\frac{5}{10}+\frac{250}{10}\right)-\left(\frac{5}{10}+\frac{1}{10}\right)=$
$=\frac{255}{10}-\frac{6}{10}=\frac{249}{10}=24\frac{9}{10}$

2. $\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)\times10-\frac{3}{4}\div2+8\times\left(1\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{2}{10}+\frac{3}{10}\right)\times10-$
$-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+8\times\left(\frac{7}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{10}\times10-\frac{3}{8}+8\times\frac{6}{4}=\frac{5}{1}-\frac{3}{8}+\frac{12}{1}=$
$=\frac{40}{8}-\frac{3}{8}+\frac{96}{8}\left(\frac{40}{8}+\frac{96}{8}\right)-\frac{3}{8}=\frac{136}{8}-\frac{3}{8}=\frac{133}{8}=16\frac{5}{8}$

3. $\dfrac{3\frac{1}{4}}{2\frac{3}{8}}=\dfrac{\frac{13}{4}}{\frac{19}{8}}=\frac{13}{4}\div\frac{19}{8}=\frac{13}{4}\times\frac{8}{19}=\frac{26}{19}=1\frac{7}{19}$

4. $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}{2+\frac{1}{4}\times8}=\dfrac{\frac{2}{8}+\frac{1}{8}}{2+\frac{2}{1}}=\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{1}}=\frac{3}{8}\div\frac{4}{1}=\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$

EXERCÍCIOS.

1. $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-2\frac{1}{4}\div4+\frac{3}{4}\div\frac{1}{5}$ R. $3\frac{41}{80}$

2. $\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\div\frac{11}{12}+\frac{3}{5}\times1\frac{1}{4}-\frac{3}{8}$ R. $1\frac{3}{8}$

3. $\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{12}\div6\right)\times1\frac{1}{17}-\frac{1}{4}\times2+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\times1\frac{1}{3}$ R. $1\frac{5}{12}$

4. $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\div8+2\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\times2\right)-\frac{1}{4}\times5$ R. $4\frac{55}{96}$

5. $\frac{2}{9}\div\frac{3}{8}+\frac{4}{7}\div\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\div\frac{5}{6}$ R. $1\frac{884}{945}$

6. $\left(2\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)\times\frac{4}{7}+\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+1\frac{1}{5}$ R. $3\frac{1}{5}$

7. $\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\times2\frac{2}{5}-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)\div\frac{5}{6}$ R. $\frac{1}{2}$

8. $\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\times20-1\frac{5}{8}\times2\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\div\frac{1}{3}$ R. $8\frac{11}{12}$

9. $\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{6}\right)\div\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{9}{11}+\frac{7}{8}\div\frac{7}{9}$ R. $1\frac{79}{88}$

10. $\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\div 2\frac{1}{6}+\left[\frac{1}{4}\times 4-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 2\right)\div 2\right]-$
$-\frac{3}{4}\times 1\frac{1}{3}$ **R.** 0

11. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{4}}$ **R.** $\frac{10}{21}$

12. $\dfrac{2\frac{1}{4}-1\frac{3}{5}}{3\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times 2}$ **R.** $\frac{39}{230}$.

Problemas.

1. Qual é a maior porção de um todo, os seus $\frac{5}{12}$, os seus $\frac{6}{15}$ ou os seus $\frac{4}{9}$?

R. *Os* $\frac{4}{9}$

2. Das seguintes partes do ano, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{1}{3}$, quais a de maior e a de menor duração?

R. *A de maior duração* $\frac{6}{13}$, *e a de menor* $\frac{1}{3}$.

3. Das águas fornecidas a uma cidade $\frac{1}{3}$ são para o serviço público, $\frac{1}{4}$ para o serviço industrial e $\frac{1}{5}$ para compensar as perdas inevitáveis. Que fração resta para o serviço particular?

R. $\frac{13}{60}$.

4. Um capinador pode limpar certa área em 10 dias; um outro, em 12 dias, e um terceiro, em 15 dias. Os três juntos que porção de área limpariam em um dia?

R. $\frac{1}{4}$.

5. Três operários fizeram respectivamente $\frac{3}{20}$, $\frac{2}{9}$ e $\frac{4}{21}$ de uma obra em um dia. Juntos que parte completaram?

R. $\frac{709}{1260}$.

6. Através de uma vidraça perde-se $\frac{4}{15}$ de luz solar com o madeiramento, $\frac{3}{20}$ com a absorção pelos vidros e $\frac{1}{3}$ com o cortinado. Que porção é desperdiçada?

R. $\frac{3}{4}$.

7. Um negociante vendeu a um primeiro freguês $4m\frac{2}{3}$ de uma fazenda; a um 2.°, $5m\frac{3}{5}$; a um 3.°, $3m\frac{1}{2}$, e a um 4.°, $2m\frac{3}{8}$. Quantos metros foram vendidos?

R. *16m* $\frac{17}{120}$.

8. Estudei aritmética 6 horas e $\frac{5}{6}$, gramática 4 horas e $\frac{1}{3}$, geografia 5 horas e $\frac{3}{4}$, e $3\frac{1}{2}$ de história do Brasil no decurso de uma semana. Quanto estudei ao todo?

R. *20 horas e* $\frac{5}{12}$.

9. Preciso ler hoje $\frac{5}{8}$ de um livro. Já li $\frac{2}{7}$. Que porção devo ler ainda?

R. $\frac{19}{56}$.

10. Um operário assim aplica o seu salário: $\frac{4}{9}$ com alimentação; $\frac{3}{10}$ com a vestimenta e $\frac{2}{15}$ com distrações e eventuais. Quanto pode economizar?

R. $\frac{11}{90}$

11. Do calor solar só $\frac{16}{25}$ chegam ao solo; o resto é absorvido pela atmosfera. Enquanto importa êste resto?

R. *Em* $\frac{9}{25}$.

12. Um operário faz sòzinho uma obra em 10 dias; um segundo, em 8 dias. Em quantos dias um terceiro a faria para que os três juntos possam em um dia fazer $\frac{37}{120}$ dessa obra?

R. *Em 12 dias.*

13. Paguei já $\frac{2}{9}$, depois $\frac{1}{4}$, depois $\frac{4}{15}$ de uma dívida. Que fração preciso pagar para saldar $\frac{4}{5}$ da dívida?

R. $\frac{11}{180}$

14. Uma massa de ferro pesa 3kg e $\frac{5}{9}$. Quantos kg faltam para completar um litro de ferro, que pesa 7kg e $\frac{4}{5}$?

R. *4kg e* $\frac{11}{45}$.

15. Uma peça de casimira tem 10m e $\frac{1}{5}$ de comprimento. Para três ternos gastam-se respectivamente 2m$\frac{3}{4}$, 3m $\frac{1}{5}$ e 2m$\frac{3}{5}$. Quanto resta?

R. *1m e* $\frac{13}{20}$.

16. Sendo o gás carbônico formado de oxigênio e carbono, e querendo-se produzir 8kg $\frac{4}{5}$ dêsse gás com 2kg $\frac{2}{5}$ de carbono, quanto é preciso de oxigênio?

R. *6kg e* $\frac{2}{5}$

17. A torneira de água fria enche um banheiro em 30 minutos; a de água quente, em 45 minutos, e o tubo de escoamento esgota-o cheio em 27 minutos. Estando ambas as torneiras e o tubo de escoamento abertos, em quanto tempo se encherá o banheiro?

R. *54 minutos.*

18. Estudando $\frac{3}{4}$ de hora de gramática em um dia, quanto terei estudado em uma semana, dessa disciplina?

R. *5 horas e* $\frac{1}{4}$.

19. A luz percorre 300000 quilômetros por segundo. Quanto percorrerá em $\frac{2}{5}$ de segundo?

R. *120000km.*

20. Um homem adulto absorve $\frac{5}{12}$ de litro de oxigênio por minuto; quantos absorve em $\frac{3}{10}$ de minuto?

R. $\frac{1}{8}$ *de litro.*

21. Um tanque enche-se em $\frac{4}{7}$ de hora. Em quanto tempo se enchem $\frac{7}{10}$ do tanque?

R. $\frac{2}{5}$ *de hora.*

22. Um metro cúbico de alumínio pesa duas toneladas e $\frac{3}{5}$. Quanto pesarão $\frac{7}{12}$ de metro cúbico?

R. *Uma tonelada e* $\frac{31}{60}$

23. Havendo em 1hl de ar $20\frac{4}{5}$ litros de oxigênio, quanto de oxigênio há em $5\frac{2}{3}$hl? **R.** *$117\frac{13}{15}$ litros.*

24. Comprou-se $5\frac{2}{3}$ metros de uma fazenda a 6$000 o metro; $3\frac{1}{4}$ de uma outra a 4$800 o metro, e $7\frac{3}{5}$ de uma terceira a 3$000. Qual foi a despesa total?

R. *72$400.*

25. Quantas horas representam $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{8}$ de um dia?

R. *3 horas e $\frac{3}{5}$.*

CAPÍTULO VII

Redução de frações ordinárias em decimais

Já vimos que, para escrever um número decimal sob a forma de fração ordinária, aplica-se a seguinte

Regra. — *Para escrever um número decimal sob a forma de fração ordinária, escreve-se uma fração cujo numerador é o número decimal sem a vírgula e cujo denominador é formado pela unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos decimais.*

Exemplo.

$$3{,}527 = \frac{3527}{1000}$$

Vejamos, agora, como se converte uma fração ordinária em número decimal.

Regra. — *Para converter uma fração ordinária em número decimal, divide-se o numerador pelo denominador, e tem-se a parte inteira do quociente, à direita da qual se coloca uma vírgula. Escreve-se um zero à direita do resto obtido, e, dividindo-se o resultado pelo mesmo divisor, têm-se os décimos do quociente. E assim se prossegue, colocando um zero à direita de cada resto, até obter-se a aproximação desejada.*

Exemplos.

1.º) 17 | 5 → 20, 0; quociente 3,4

2.º) 30 | 8 → 60, 40, 0; quociente 0,375

3.º) 50 | 6 → 20, 20, 2; quociente 0,833...

Assim,

$\frac{17}{5}=3,4$; $\frac{3}{8}=0,375$; $\frac{5}{6}=0,833\ldots$

Daí se conclue que as duas primeiras frações ordinárias consideradas, $\frac{17}{5}$ e $\frac{3}{8}$, podem ser convertidas em *frações decimais.*

No terceiro exemplo, o resto obtido 2, das diversas divisões parciais, é sempre o mesmo, e, portanto, a operação pode ser prolongada indefinidamente e o algarismo 3 será reproduzido continuamente no quociente. Conclue-se, pois, que não existe fração decimal *limitada* igual à fração ordinária $\frac{5}{6}$.

Nos dois primeiros casos, em que a divisão se esgota, o quociente é um número decimal fracionário exato; no terceiro, em que a divisão não se esgota, o quociente é um *número decimal periódico* ou *dízima periódica.*

Vejamos agora qual a condição para que uma fração ordinária possa ser transformada exatamente em decimal, isto é, em um *número decimal limitado.*

Para que uma fração ordinária irredutível possa ser convertida exatamente em fração decimal é necessário e suficiente que o seu denominador não contenha fatores primos diferentes de 2 e 5.

Assim, as frações $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{25}$ e $\frac{3}{10}$ são convertíveis em frações decimais exatas, pois

$$8=2\times2\times2$$
$$25=5\times5$$
$$10=2\times5$$

Já as frações $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{30}$ não são convertíveis em frações decimais exatas; originam frações decimais *ilimitadas* ou *dízimas periódicas*, pois

$$9=3\times3$$
$$6=2\times3$$
$$30=2\times3\times5$$

Fazendo a conversão, encontra-se

$\frac{3}{8}=0,375$; $\frac{7}{25}=0,28$; $\frac{3}{10}=0,3$

$\frac{2}{9}=0,222\ldots$ $\frac{5}{6}=0,833\ldots$ $\frac{1}{30}=0,0333\ldots$

Observação. — E' fácil verificar que o número de algarismos decimais da fração decimal limitada, obtida na conversão, é igual ao maior expoente dos fatores que entram no denominador.

Assim, como 8 é igual a 2^3, a fração ordinária cujo denominador for 8, terá três algarismos na parte decimal; sendo 50 igual 2×5^2, a fração cujo denominador for 50, terá dois algarismos decimais.

Exemplos.

$\frac{3}{8}=0,375$; $\frac{5}{8}=0,625$; $\frac{3}{50}=0,06$; $\frac{11}{50}=0,22$; etc.

Exercícios.

Converter as seguintes frações ordinárias em números decimais, dizendo prèviamente se é limitado ou não o número obtido :

1.	$\frac{1}{2}$	R. 0,5	8.	$\frac{5}{9}$	R. 0,555 . .
2.	$\frac{3}{4}$	R. 0,75	9.	$\frac{7}{12}$	R. 0,58333 . .
3.	$\frac{5}{8}$	R. 0,625	10.	$\frac{3}{18}$	R. 0,1666 . .
4.	$\frac{3}{5}$	R. 0,6	11.	$\frac{1}{15}$	R. 0,06666 . .
5.	$\frac{13}{25}$	R. 0,52	12.	$\frac{2}{75}$	R. 0,02666 . .
6.	$\frac{11}{125}$	R. 0,088	13.	$\frac{64}{11}$	R. 5,8181 . .
7.	$\frac{1}{3}$	R. 0,333 . .	14.	$\frac{7}{22}$	R. 0,31818 . .

Converter em frações ordinárias os números decimais seguintes :

1.	0,25	R. $\frac{1}{4}$	4.	0,9	R. $\frac{9}{10}$
2.	0,42	R. $\frac{21}{50}$	5.	0,45	R. $\frac{9}{20}$
3.	0,55	R. $\frac{11}{20}$	6.	0,125	R. $\frac{1}{8}$

7.	0,625	R. $\frac{5}{8}$	9.	8,12	R. $8\frac{3}{25}$
8.	4,8	R. $4\frac{4}{5}$	10.	25,35	R. $25\frac{7}{20}$

DÍZIMAS PERIÓDICAS

Número decimal periódico ou *dízima periódica* é aquele cujos algarismos da parte decimal se repetem indefinidamente e sempre na mesma ordem.

Assim, 0,353535 . . ; 2,212121 . . ; 5,8333 . . são números decimais periódicos.

Chama-se *período* ao número formado pelo algarismo ou grupo de algarismos que se repetem.

Nos exemplos precedentes os períodos são respectivamente 35, 21 e 3.

A periodicidade de um número decimal representa-se por . . ., repetindo-se o período algumas vêzes.

Exemplo. 3,52121 . .

Lê-se :

três vírgula, cinco, vinte e um, vinte e um, etc.

A dízima periódica pode ser *simples* ou *composta*.

Periódica simples é aquela cujos períodos começam logo após a vírgula.

Exemplos.

0,212121 . . ; 3,353535 . .

Dízima periódica composta é aquela que apresenta entre a vírgula e o primeiro período uma parte que não se repete e denominada *parte não periódica*.

Assim, 0,0555 . . e 2,51212 . . . são dízimas periódicas compostas e as partes não periódicas são respectivamente 0 e 5.

Na conversão de uma fração ordinária em decimal ilimitada, é possível prever qual a natureza da dízima periódica resultante.

1.°) *Tôda fração irredutível, em cujo denominador não entram nem o fator 2 nem o fator 5, convertida em decimal dá uma dízima periódica simples.*

As frações $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$ e $\frac{11}{21}$, p. ex., convertidas em decimais, dão dízimas periódicas simples, pois

$$3=3$$
$$9=3\times3$$
$$21=3\times7$$

Fazendo a conversão, acha-se

$\frac{2}{3}=0,66\ldots$; $\frac{5}{9}=0,55\ldots$; $\frac{11}{21}=0,523809523809\ldots$

2.°) *Tôda fração irredutível em cujo denominador entram os fatores 2 ou 5 com fatores primos diferentes, convertida em decimal, dá uma dízima periódica composta.*

Assim, as frações $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{15}$ e $\frac{11}{30}$, convertidas em frações decimais, dão dízimas periódicas compostas, pois

$$6=2\times3$$
$$15=3\times5$$
$$30=2\times3\times5$$

Fazendo a conversão, acha-se

$\frac{5}{6}=0,8333\ldots$; $\frac{4}{15}=0,2666\ldots$; $\frac{11}{30}=0,3666\ldots$

Determinação da fração geratriz de uma dízima periódica. — Chama-se *fração geratriz* de uma dízima periódica a fração ordinária que, convertida em decimal, dá origem a essa dízima.

As frações $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$ e $\frac{5}{6}$, p. ex., são respectivamente as geratrizes das dízimas periódicas 0,66 . . . ; 0,55 . . . e 0,8333 . . .

Há dois casos a considerar na determinação da geratriz de uma dízima periódica:

1.°) *Determinar a geratriz de uma dízima periódica simples.*

2.°) *Determinar a geratriz de uma dízima periódica composta.*

1.° caso. — Para determinar a geratriz de uma dízima periódica simples, aplica-se a seguinte

Regra. — *A fração geratriz de uma dízima periódica simples, em que não existe parte inteira, é uma fração cujo numerador é um dos períodos e cujo denominador é um número formado de tantos noves quantos são os algarismos que constituem o período.*

Exemplos.

$0,777\ldots=\frac{7}{9}$; $0,0606\ldots=\frac{6}{99}=\frac{2}{33}$

$0,2121\ldots=\frac{21}{99}=\frac{7}{33}$

Observação. — Quando a dízima periódica simples contém parte inteira, a fração ordinária geratriz correspondente é um número misto cuja parte inteira é a mesma e cuja parte fracionária é a fração

geratriz da dízima periódica que se obtém abstraindo da parte inteira.

Exemplo.

A geratriz de 5,666 ... é $5+\frac{6}{9}=5+\frac{2}{3}=\frac{17}{3}$

2.° caso. — Para determinar a geratriz de uma dízima periódica composta, tem-se a seguinte

Regra. — *A fração geratriz de uma dízima periódica composta, em que não existe parte inteira, é uma fração cujo numerador é a parte não periódica seguida de um dos períodos, menos a parte não periódica; e cujo denominador é um número constituído de tantos noves quantos são os algarismos do período, seguido de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não periódica.*

Exemplos.

$0,833\ldots=\frac{83-8}{90}=\frac{75}{90}=\frac{5}{6}$; $0,002525\ldots=\frac{25}{9900}=\frac{1}{396}$;

$0,2533\ldots=\frac{253-25}{900}=\frac{228}{900}=\frac{19}{75}$

Observação. — Quando a dízima periódica composta contém parte inteira, obtém-se a fração geratriz, procedendo-se como foi indicado no primeiro caso.

Exemplo.

A geratriz de 7,533 ... é

$$7+\frac{53-5}{90}=7+\frac{48}{90}=7+\frac{8}{15}=\frac{113}{15}$$

Exercícios.

Achar as frações geratrizes das seguintes dízimas periódicas :

1. 0,55 ... R. $\frac{5}{9}$
2. 0,666 ... R. $\frac{2}{3}$
3. 0,8181 ... R. $\frac{9}{11}$
4. 0,7575 ... R. $\frac{25}{33}$
5. 0,121121 ... R. $\frac{121}{999}$
6. 2,0505 ... R. $2\frac{5}{99}$
7. 5,7272 ... R. $5\frac{8}{11}$
8. 0,377 ... R. $\frac{17}{45}$
9. 0,25666 ... R. $\frac{77}{300}$
10. 0,02525 ... R. $\frac{5}{198}$
11. 0,21515 ... R. $\frac{71}{330}$
12. 3,5444 ... R. $3\frac{49}{90}$
13. 2,32121 ... R. $2\frac{53}{165}$
14. 4,726969 ... R. $4\frac{2399}{3300}$
15. 2,0515151 ... R. $2\frac{17}{330}$

CAPÍTULO VIII

Números complexos e incomplexos. Medidas antigas

Números incomplexos e complexos. — *Número concreto*, como sabemos, é o que vem seguido do nome da unidade a que se refere. *Ex.*: 8 minutos; 4 horas 7 minutos e 22 segundos; etc.

O número concreto pode ser incomplexo ou complexo.

Número incomplexo é o que se refere a uma única espécie de unidade. *Ex.*: 5 horas; 8 graus; etc.

Número complexo é o que se refere a duas ou mais unidades da mesma espécie, ligadas entre si por relações determinadas, mas não decimais. *Ex.*: 8 dias 4 horas e 2 minutos; 15 graus 8 minutos e 7 segundos; etc.

Os números complexos são empregados na medida de certas grandezas, como tempo, ângulos, moeda inglesa, etc. As operações com êsses números são, porém, mais difíceis do que com os números decimais.

Medidas de tempo. — O sistema métrico decimal apresentou novas medidas de tempo, ligadas

por relações decimais; prevaleceram porém as antigas, cuja unidade principal é o *dia*. Abaixo estão enumerados os múltiplos e submúltiplos dessa unidade.

Múltiplos :

Século	100 anos
Decênio	10 „
Lustro.	5 „
Ano	12 meses trigesimais e 5 dias 12 meses do calendário 365 dias
Semestre. . . .	6 meses
Trimestre. . . .	3 „
Bimestre	2 „
Mês	28, 29, 30 ou 31 dias
Semana	7 dias

Unidade principal :

Dia	24 horas

Submúltiplos :

Hora.	$\frac{1}{24}$ do dia (60 minutos)
Minuto	$\frac{1}{60}$ da hora (60 segundos)
Segundo	$\frac{1}{60}$ do minuto

As frações de segundo são geralmente expressas em números decimais, isto é, em décimos, centésimos, etc.

O *ano* é o tempo que demora a Terra para realizar o seu movimento de translação em tôrno do Sol. O *ano civil* tem 365 dias, exceto os anos *bissextos*, que vêm de 4 em 4 anos e que são de 366 dias. O *ano comercial* é de 360 dias.

Os meses do ano são : janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho, julho, agôsto, setembro, outubro, novembro, dezembro, respectivamente com 31, 28, (29 nos anos bissextos), 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30, 31 dias.

O ano divide-se em 52 *semanas*. O mês é formado de 4 *semanas*, cada uma das quais consta de 7 dias, a saber : *segunda-feira*, *têrça-feira*, *quarta-feira*, *quinta-feira*, *sexta-feira*, *sabado* e *domingo*.

Medidas angulares. — No sistema métrico decimal, divide-se a *circunferência* em duas *semicircunferências ;* cada semicircunferência em dois *quadrantes ;* cada quadrante em 100 partes iguais denominadas *grados ;* cada grado (unidade principal) em 100 partes denominadas *minutos centesimais ;* cada minuto centesimal em 100 partes chamadas *segundos centesimais*.

Na prática, ainda se adota de preferência a divisão antiga da circunferência, denominada divisão *sexagesimal*. A circunferência divide-se em duas partes iguais chamadas *semicircunferências ;* cada semicircunferência em duas partes iguais denominadas *quadrantes ;* cada quadrante em 90 partes iguais

denominadas *graus*; cada grau em 60 partes chamadas *minutos*; cada minuto em 60 partes que se chamam *segundos*.

Representa-se o grau pelo sinal °, o minuto pelo sinal ', e o segundo pelo sinal ".

Desejando designar um arco de 26 graus, 8 minutos e 45 segundos, escrevemos:

$$26°8'45''.$$

Moeda inglesa. — A unidade monetária inglesa é a *libra esterlina*, que se divide em 20 shillings ou *soldos* e o shilling em 12 pence ou *dinheiros*.

Abreviaturas: libra (£); soldo (s); dinheiro (d).

Exemplo.

4 libras 8 soldos 3 dinheiros, escreve-se:

4£ 8s 3d ou £4 — 8 — 3.

Portanto

1 soldo = 12 dinheiros

1 £ = 20 soldos = 20×12=240 dinheiros (1).

Medidas antigas. — O antigo sistema de pesos e medidas, empregado no Brasil, constava das seguintes medidas principais:

(1) MOEDA BRASILEIRA. — O sistema métrico decimal também apresentou novas unidades monetárias, ligadas entre si por relações decimais; o *franco* é a unidade principal, de valor, naquele sistema. Entre nós, porém, prevalece ainda o *real* (moeda fictícia, em que se funda a formação de tôdas as outras), como unidade principal. Sendo, no entanto, muito pequena emprega-se o seu múltiplo — o *mil réis* como unidade mercantil. O *conto de réis*, que vale mil vêzes mil réis é a unidade bancária.

MEDIDAS DE COMPRIMENTO

Légua brasileira	3000 braças	6600	m
Légua marítima	3 milhas	5555	,,
Milha brasileira	1000 braças	2200	,,
Milha marítima	841 ¾ braças	1851,85	,,
Braça	2 varas	2,2	,,
Vara (unidade princ.)	5 palmos	1,1	,,
Palmo	8 polegadas	0,22	,,
Polegada	12 linhas	0,0275	,,
Linha	12 pontos	0,00229	,,
Côvado	3 palm. e ¾ de pol.	0,681	,,
Jarda	4 pal. 1 pol. e ¼ de pol.	0,914	,,
Toesa	6 pés	1,98	,,
Pé	12 polegadas	0,33	,,

MEDIDAS DE SUPERFÍCIE

Légua quadrada	43km²,56
Milha quadrada	4km²,84
Braça quadrada	4m²,84
Vara quadrada	1m²,21
Palmo quadrado (unidade principal)	0m²,0484
Polegada quadrada	0m²,000756
Geira (medida agrária)	1936m²

MEDIDAS DE VOLUME

Braça cúbica	10m³,648
Vara cúbica	1m³,331
Pé cúbico	0m³,035937
Palmo cúbico (unidade principal)	0m³,010648
Polegada cúbica	0m³,000020797

MEDIDAS DE CAPACIDADE

Para líquidos:

Tonel	2 pipas	960	litros
Pipa	15 almudes	480	,,
Almude	12 canadas	32	,,
Canada ou medida (unid. princ.)	4 quartilhos	2,662	,,
Quartilho ou garrafa		0,665	,,

Para secos:

Moio	60 alqueires	2176,2	litros
Alqueire (unidade principal)	4 quartas	36,27	,,
Quarta		9,07	,,

MEDIDAS DE PÊSO

Tonelada	13 1/2 quintais	793kg,238
Quintal	4 arrobas	58kg,7584
Arroba (unid. principal)	32 libras	14kg,6896
Libra	2 marcos	459g,05
Marco	8 onças	229g,525
Onça	8 oitavas	28g,6906
Oitava	72 grãos	3g,5863
Grão		0g,0498

CAPÍTULO IX

Razões e proporções

Razões. — *Razão de duas grandezas* da mesma espécie é a razão entre os números que as medem, admitindo-se que foram medidas com a mesma unidade.

Razão de dois números é o quociente indicado da divisão do primeiro pelo segundo. Suponhamos duas grandezas A e B da mesma espécie, medidas com a mesma unidade U e que esta esteja contida duas vêzes na primeira e três na segunda. Os números 2 e 3 são os resultados da medida das grandezas A e B com auxílio da mesma unidade U. A razão entre as grandezas A e B é a razão entre os números 2 e 3.

Notação. — Exprime-se a razão entre dois números, escrevendo um em seguida ao outro, separados por dois pontos, ou por um traço de fração.

Assim, a razão entre 15 e 3 é 5, e escreve-se

$$15 : 3 \text{ ou } \frac{15}{3} \text{; e lê-se}$$

15 para 3, ou 15 sôbre 3 (1)

(1) A primeira notação é pouco usada atualmente.

Termos de uma razão. — Os números que formam a razão denominam-se *termos*.

O primeiro têrmo ou dividendo chama-se *antecedente*; o segundo têrmo ou divisor chama-se *consequente*.

Assim, na razão 8 : 2 ou $\frac{8}{2}$, 8 é o antecedente e 2 o consequente.

A razão é, pois, uma divisão indicada ou fração.

Portanto, numa razão o antecedente é dividendo ou numerador, o consequente é divisor ou denominador.

Daí tiramos as seguintes conclusões:

1.ª Quando se multiplica ou se divide o antecedente por um número, a razão fica multiplicada ou dividida por êsse número.

2.ª Quando se multiplica ou se divide o consequente por um número, a razão fica dividida ou multiplicada por êsse número.

3.ª Quando se multiplicam ou se dividem os dois termos por um mesmo número, a razão não se altera.

4.ª Em tôda a razão, o antecedente é igual ao produto do consequente pelo quociente dos dois termos.

Assim, na razão

$$10:5 \text{ ou } \frac{10}{5}=2, \text{ temos } 10=5\times2$$

Do mesmo modo, na razão

$$3:5 \text{ ou } \frac{3}{5}, \text{ temos } 3=5\times\frac{3}{5}$$

Razões iguais e inversas. — Duas ou mais razões são *iguais* quando lhes são iguais os quocientes.

Assim, $\frac{15}{3}$, $\frac{20}{4}$ e $\frac{30}{6}$ são razões iguais porque dão o mesmo quociente 5.

Quando o antecedente de uma razão é igual ao consequente de outra e viceversa, as razões denominam-se *inversas*.

As razões $\frac{5}{6}$ e $\frac{6}{5}$, por exemplo, são inversas.

Observação. — Não se deve confundir razão com quociente. A razão é sempre um quociente indicado, mas nem todo quociente indicado é razão. Assim, a razão 8 : 4 é quociente indicado da divisão de 8 por 4. Já a expressão 10m ÷ 2, por exemplo, é um quociente indicado mas não razão.

Além disso, a razão é sempre um *número abstrato*, ao passo que o quociente pode ser um número concreto.

Proporções. — *Proporção* é a expressão de igualdade entre duas razões.

Sejam as duas razões iguais

$$\frac{12}{3}=4 \text{ e } \frac{20}{5}=4$$

Podemos escrever

$$\frac{12}{3}=\frac{20}{5},$$

igualdade que toma o nome de *proporção*.

Notação. — Representam-se as proporções separando as duas razões por quatro pontos, ou pelo

sinal de igualdade. A proporção precedente representa-se como segue:

$$\frac{12}{3}=\frac{20}{5} \text{ ou } 12:3::20:5 \text{ (1)}$$

e lê-se: 12 sôbre 3 é igual a 20 sôbre 5, ou 12 está para 3 assim como 20 está para 5.

Termos. — Os números que formam a proporção denominam-se *termos*. O primeiro e o terceiro *termos* são os *antecedentes*; o segundo e o quarto, os *consequentes*. O primeiro e o quarto termos denominam-se *extremos*, o segundo e o terceiro *meios*.

Propriedade fundamental. — *Em tôda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.*

Assim, na proporção $\frac{12}{3}=\frac{20}{5}$ temos

$$12\times5=3\times20=60$$

Conhecendo três termos de uma proporção, pode-se determinar o quarto.

Regra. — *Um extremo de uma proporção é igual ao produto dos meios dividido pelo extremo conhecido.*

Assim, na proporção $\frac{4}{2}=\frac{10}{x}$, temos

$$4\times x=2\times10 \text{ e } x=\frac{2\times10}{4}=5$$

Regra. — *Um meio de uma proporção é igual ao produto dos extremos dividido pelo meio conhecido.*

(1) A última notação é pouco usada.

Assim, na proporção $\frac{15}{5}=\frac{18}{x}$, temos

$$15\times x=5\times18 \text{ e } x=\frac{5\times18}{15}=6$$

Além disso, é possível mudar a ordem dos termos da proporção, desde que o produto dos extremos continue sendo igual ao dos meios. Pode-se mudar o lugar dos meios ou dos extremos (*alternar*); colocar os meios no lugar dos extremos e viceversa (*inverter*); mudar a colocação das razões (*transpor*).

Assim, alternando a proporção $\frac{15}{5}=\frac{18}{6}$, vem $\frac{15}{18}=\frac{5}{6}$; invertendo, temos $\frac{5}{15}=\frac{6}{18}$; finalmente transpondo, acha-se $\frac{18}{6}=\frac{15}{5}$.

Médias. — *Média aritmética* ou simplesmente *média* de dois ou mais números é o quociente da divisão da soma dêsses números pelo seu número.

Assim, a média aritmética dos números

6, 8, 0,4 e 2,6 é

$$\frac{6+8+0{,}4+2{,}6}{4}=\frac{17}{4}=4{,}25$$

Denomina-se *proporção contínua* aquela cujos meios são iguais. Ao meio de uma proporção contínua chama-se *média proporcional* ou *média geométrica* entre os dois extremos.

Assim, a proporção $\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$ é contínua e 6 é a média proporcional ou média geométrica entre os extremos 4 e 9.

A média geométrica ou proporcional é igual à raiz quadrada do produto dos extremos.

Assim, na proporção $\frac{4}{x}=\frac{x}{9}$, tem-se

$$x=\sqrt{4\times9}=\sqrt{36}=6$$

Nota. — Duas grandezas são *diretamente proporcionais* quando tornando uma um certo número de vêzes *maior ou menor*, a outra também fica igual número de vêzes *maior ou menor*.

Ex.: 5 quilos de certa mercadoria custam 15$000. 5 quilos e 15$000 são diretamente proporcionais, pois 2, 3... vêzes mais quilos custarão 2, 3... vêzes mais, e viceversa.

Duas grandezas são *inversamente proporcionais* quando tornando uma um certo número de vêzes *maior ou menor*, a outra também fica o mesmo número de vêzes *menor ou maior*.

Exemplo.

Um trem com a velocidade de 60km/h vence a distância entre duas cidades em 2 horas e $\frac{1}{2}$; 60 km/h e $2\frac{1}{2}$h são inversamente proporcionais, porque com a velocidade 2, 3 ... vêzes maior ou menor, o tempo seria 2, 3... vêzes menor ou maior.

Exercícios.

Determinar o valor de x nas seguintes proporções :

1. $\frac{3}{4}=\frac{12}{x}$ R. 16
2. $\frac{6}{3}=\frac{x}{9}$ R. 18

3. $\frac{8}{x}=\frac{12}{9}$ R. 6
4. $\frac{x}{30}=\frac{4}{8}$ R. 15
5. $\frac{11}{33}=\frac{1}{x}$ R. 3
6. $\frac{14}{28}=\frac{x}{2}$ R. 1
7. $\frac{21}{x}=\frac{7}{2}$ R. 6
8. $\frac{x}{25}=\frac{1}{5}$ R. 5
9. $\frac{36}{45}=\frac{12}{x}$ R. 15
10. $\frac{8}{15}=\frac{x}{30}$ R. 16
11. $\frac{39}{x}=\frac{13}{2}$ R. 6
12. $\frac{0{,}18}{0{,}9}=\frac{0{,}3}{x}$ R. 1,5
13. $\frac{1{,}4}{0{,}7}=\frac{x}{2}$ R. 4
14. $\frac{\frac{1}{2}}{x}=\frac{\frac{9}{8}}{\frac{3}{4}}$ R. $\frac{1}{3}$
15. $\frac{x}{1\frac{1}{2}}=\frac{2{,}5}{3}$ R. 1,25

REGRA DE TRÊS

Regra de três é a questão que tem por fim determinar uma quantidade desconhecida por meio de outras conhecidas, com as quais mantém relações de proporção.

Há duas espécies de regras de três : *simples* e *composta*.

Regra de três simples. — E' aquela que consta de quatro *quantidades*, sendo uma delas desconhecida. Esta se representa geralmente pela letra x.

As regras de três simples podem ser *diretas* ou *inversas*.

Diretas são as regras de três que dizem respeito a grandezas diretamente proporcionais.

Inversas são as regras de três que se referem a grandezas inversamente proporcionais.

As questões de regra de três podem ser resolvidas por dois métodos: 1) pelo *método das proporções*; 2) pelo *método de redução à unidade*.

Regra de três simples e direta. — Seja a questão seguinte:

Um automóvel percorre 300 quilômetros em 4 horas; quantos quilômetros percorrerá, com a mesma velocidade, em 12 horas?

1.º) *Pelo método das proporções.* — Podemos escrever abreviadamente

em 4h. 300km
em 12h. x

As grandezas do problema são diretamente proporcionais, pois aumentando o tempo também aumenta o espaço. Essa questão é, pois, uma regra de três simples e direta. Assim, temos

$$\frac{4}{12}=\frac{300}{x}$$

Determinando o valor de x, vem

$$x=\frac{12\times300}{4}=900\text{km}$$

2.º) *Pela redução à unidade.*

O automóvel percorre em

4h 300km

1h percorrerá . . . . . . $\frac{300}{4}$

Portanto, em 12h a distância percorrida será $\frac{12\times300}{4}$

Assim,

$$x=\frac{12\times300}{4}=900\text{km}$$

2.º) *Um terreno de forma retangular, tendo 15 metros de frente por 32 de fundo, custa 6:000$000. Qual seria o preço do terreno se a área fosse de 180m²?*

A área do terreno dado será

$$A=15\text{m}\times32\text{m}=480\text{m}^2$$

1.º) Escrevendo abreviadamente, obtém-se

480m² valendo 6:000$000
180m² valerão x

As grandezas do problema são diretamente proporcionais, pois diminuindo a área diminue o valor do terreno. E', portanto, uma regra de três simples e direta. Assim, obtém-se

$$\frac{480}{180}=\frac{6000000}{x}$$

Determinando x, encontra-se

$$x=180\times\frac{6000000}{480}=2:250\$000$$

2.º) *Redução à unidade.*

Se 480m² custam . . . . 6:000$000

1m² custará . . . . $\frac{6000000}{480}$

Portanto, 180m² custarão $\frac{6000000\times180}{480}$

Assim, $x=\frac{6000000\times180}{480}=2:250\$000$

Regra de três simples e inversa. — Seja o problema seguinte:

15 operários realizam um certo trabalho em 20 dias. Em quantos dias 30 operários poderão executá-lo?

1.º) Escrevendo abreviadamente, tem-se

15 operários . . . . . 20 dias
30 operários x

As duas grandezas, número de operários e dias de trabalho, são inversamente proporcionais, pois aumentando o número de operários diminue o tempo necessário para realizar a obra. Esta questão é, portanto, uma regra de três simples e inversa.

Assim, temos $\frac{15}{30}=\frac{x}{20}$

Donde

$$x=\frac{15\times 20}{30}=10 \text{ dias}$$

2.º) *Redução à unidade.*

Se 15 operários realizam o trabalho em 20 dias
1 operário realizará o trabalho em 20×15

Portanto 30 operários realizarão o trabalho em $\frac{20\times 15}{30}$

Logo $x=\frac{20\times 15}{30}=10$ dias

2.º) *Um trem, dotado de velocidade de 60km por hora, percorre a distância entre duas estações em 6 horas. Em que tempo vencerá a mesma distância com a velocidade de 90km por hora?*

1.º) Escrevendo abreviadamente, tem-se

60 km/h 6h
90 km/h x

E' claro que aumentando a velocidade, diminue o tempo necessário para vencer a distância. Essa questão é, portanto, uma regra de três simples e inversa, pois a velocidade e o tempo são grandezas inversamente proporcionais. Portanto

$\frac{60}{90}=\frac{x}{6}$ Logo $x=\frac{6\times 60}{90}=4$ horas

2.º) *Redução à unidade.*

Se a 60 km/h leva 6h
a 1 km/h levará . . . . . 60×6
e a 90 km/h levará . . . . . $\frac{60\times 6}{90}$

Assim, $x=\frac{60\times 6}{90}=4$ horas

Regra de três composta. — Chama-se *regra de três composta* aquela em que o valor da grandeza desconhecida é direta ou inversamente proporcional a várias outras grandezas dadas.

Seja a seguinte questão: *Se 15 operários trabalhando 10 horas por dia, levam 24 dias para realizar uma obra, quantos operários em 25 dias, trabalhando 8 horas por dia, realizarão a mesma obra?*

Pelas proporções. — Escrevamos abreviadamente

15 op. . . . . . . 10 h. . . 24d
x . . . . 8 h. . . 25d

Vamos resolver essa regra de três composta pela resolução de várias regras de três simples.

1.ª) Supondo fixo o número de horas diárias de trabalho, o problema consistirá sòmente no seguinte:

Se 15 operários realizam uma obra em 24 dias, quantos operários, em condições idênticas, realizarão a mesma obra em 25 dias?

Escrevendo abreviadamente, vem

15 op. . . . . 24 d
x . . . . 25 d

Resolvendo essa regra de três simples e inversa, tem-se

$\frac{15}{x}=\frac{25}{24}$ $x=\frac{24\times 15}{25}$

2.ª) Determinado êsse valor, consideremos fixo o número de dias e façamos variar o número de horas. Teremos, então, a seguinte questão:

Sabendo-se que $\frac{24\times15}{25}$ *operários fazem uma certa obra trabalhando 10 horas por dia, quantos operários farão a mesma obra trabalhando 8 horas por dia?*

E' uma regra de três simples e inversa. Resolvendo, obtém-se

$$\frac{\frac{24\times15}{25}}{x}=\frac{8}{10}$$

$$x=\frac{\frac{24\times15}{25}\times10}{8}=\frac{24\times15\times10}{8\times25}=18 \text{ operários}$$

Redução à unidade. — As regras de três compostas, como as regras de três simples, podem ser resolvidas pela redução à unidade. Resolvamos a questão precedente.

Se trabalhando 10h por dia, durante . . .	24 dias
são precisos . . .	15 operários
trabalhando 1h por dia, durante . . .	24 dias serão
precisos 10 vêzes mais . . .	15×10;
trabalhando 8h por dia, durante . . .	24 dias serão
necessários 8 vêzes menos . . .	$\frac{15\times10}{8}$;
trabalhando . . .	1 dia
são necessários 24 vêzes mais . . .	$\frac{15\times10\times24}{8}$
finalmente, trabalhando 25d serão precisos	
25 vêzes menos . . .	$\frac{15\times10\times24}{8\times25}$

Assim, tem-se

$$x=\frac{15\times10\times24}{8\times25}=18 \text{ operários}$$

Método prático. — Pode-se, na prática, resolver uma regra de três composta qualquer, de uma maneira muito simples, como indica a seguinte

Regra. — *Para resolver uma regra de três composta, multiplica-se a quantidade correspondente à incógnita pela razão entre a segunda e a primeira das que lhe são diretamente proporcionais, e pela razão entre a primeira e a segunda das que lhe são inversamente proporcionais.*

Exemplo.

Seja a questão seguinte: *Se 60 operários em 12 dias, trabalhando 9 horas por dia, fizeram 60 metros de uma certa obra, quantos operários em 30 dias, trabalhando 6 horas por dia, farão 40 metros da mesma obra?*

Escrevendo-se abreviadamente, vem

60 op. . . .	12 d. . . .	9 h . . .	60m
x op. . . .	30 d. . . .	6 h. . . .	40m

Indiquemos pela letra *d* as grandezas diretamente proporcionais e pela *i* as que forem inversamente proporcionais à grandeza que se quer determinar (número de operários).

60 op. . . .	12 d. . . .	9 h. . . .	60m
x op. . . .	30 d. . . .	6 h. . . .	40m
	i	i	d

Aplicando a regra, tem-se

$$x=60\times\frac{12}{30}\times\frac{9}{6}\times\frac{40}{60}$$

$$x=24 \text{ operários}$$

PROBLEMAS.

1. Uma bomba fornece 150 litros de água em 3 minutos. Quantos litros fornecerá em uma hora e meia?

R. *4500 litros.*

2. Um trem percorre 60 quilômetros por hora. Quantos quilômetros percorrerá em 20 minutos com a mesma velocidade? R. *20 quilômetros.*

3. 15 quilos de café custam 36$000. Quanto custarão 25 quilos? R. *60$000.*

4. Quanto custarão 3m,40 de certa sêda, sabendo-se que 0m,60 custam 18$000? R. *102$000.*

5. 40 operários constroem 8 metros de um muro, num certo tempo. Nas mesmas condições e no mesmo tempo, 60 operários quantos metros construirão? R. *12 metros.*

6. Um veículo percorre 80 quilômetros em 3 horas e 20 minutos. Com a mesma velocidade, que distância percorrerá em 4 horas e 15 minutos? R. *102 quilômetros.*

7. Uma torneira, que despeja 4 litros de água por segundo, enche um tanque em 12 minutos. Quanto tempo levaria para enchê-lo uma torneira que fornece 6 litros por segundo? R. *8 minutos.*

8. Um avião vence a distância entre duas cidades, em 1 hora e meia com a velocidade de 120 quilômetros por hora. Quanto tempo levaria para vencer a mesma distância com a velocidade de 90 quilômetros por hora? R. *2 horas.*

9. Se 20 operários demoram 12 dias para realizar um certo trabalho, 30 operários quantos dias demorarão para executá-lo nas mesmas condições? R. *8 dias.*

10. Dois volumes iguais, um de ferro e outro de prata, pesam respectivamente 78kg e 105kg. Calcular a densidade do ferro, sabendo-se que a da prata é 10,5. R. *7,8.*

11. Um pêndulo, num determinado lugar da Terra, realiza 600 oscilações em 15 minutos. Quantas oscilações executará em 18 minutos e 3/5? R. *744 oscilações.*

12. 12dal. de ar, em condições normais, pesam 155g,16. Quantos decagramas pesarão 30dal, nas mesmas condições? R. *38,79dag.*

13. Um homem recebe 280$000 em 30 dias de trabalho. Quanto receberá trabalhando 21 dias? R. *196$000.*

14. Um indivíduo tem que vencer a distância de 120km. Sabendo-se que já percorreu 90km em 5 dias quantos dias demorará para percorrer o restante, com a mesma velocidade? R. *1 dia e 16 horas.*

15. Ao longo de uma rua plantam-se 570 árvores distantes umas das outras 5m,20. Quantas árvores poderiam ser plantadas, distantes 3m,90 uma das outras? R. *760 árvores.*

16. Uma bomba pode esgotar a água de um tanque em 9 dias e outra em 12. Em quantos dias ficará o tanque vazio, trabalhando as 2 bombas ao mesmo tempo? R. *5 dias 8 horas 25 5/7 minutos.*

17. Um indivíduo ganha 150$000 em 12 dias, trabalhando 8 horas por dia. Quanto ganhará no mesmo tempo, se trabalhar 10 horas por dia? R. *187$500.*

18. Determinar a altura de uma tôrre que projeta uma sombra de 7m,60, sabendo-se que a sombra projetada por uma haste vertical de 3m,60 de altura, no mesmo instante, é de 2m,40? R. *11,40 metros.*

19. Um terreno de forma retangular mede 12m de frente por 30m de fundo. Para conservar a mesma área quan-

tos metros de fundo devia ter se a frente fosse sòmente de 10m? **R.** *36 metros.*

20. Para realizar um certo trabalho, gastaram-se 2dam,8 de tecido com 0m,70 de largura. Quantos metros seriam necessários se o tecido tivesse mais 0m,50 de largura?

R. *39,2 metros.*

21. 18 operários demoram 15 dias para fazer uma calçada de 90m de comprimento e 4m de largura. Quantos dias levariam os mesmos operários para construir uma calçada que tivesse mais 30m de comprimento e mais 1m de largura.

R. *25 dias.*

22. Uma bomba fornece 12hl em 6 minutos. Quantas horas serão necessárias para que ela possa encher um reservatório de 5m,80 de comprimento, 3m,40 de largura e 2m de fundo? **R.** *3 horas 17 minutos 12 segundos.*

23. Sabendo-se que 150 litros de oxigênio pesam 2hg,145, em condições normais, qual será o pêso dêsse gás contido num reservatório que tem 4dam^3,500 de volume? **R.** *6435kg.*

24. Um terreno de 32ha,8 foi vendido por 3:280$000. Por quanto deverá ser vendido um terreno de forma retangular, de 100m de comprimento e 400m de largura, do mesmo valor relativo? **R.** *400$000.*

25. Cinco carretos removem 30 metros cúbicos de terra em 4 dias. Quantos carretos são necessários para se remover 48 metros cúbicos em 5 dias? **R.** $6\frac{2}{5}$ *carretos.*

26. Um tanque tem 24m de comprimento, 25m de largura e 16m de altura. Modificando-se o comprimento para 32m, a largura para 20m, qual deverá ser a altura para que a sua capacidade se mantenha a mesma?

R. *15 metros.*

27. Três pedreiros colocam 12000 tijolos em 5 dias. Quantos tijolos seriam colocados por 5 pedreiros em 7 dias?

R. *28000 tijolos.*

28. Uma viga de pinho com 0,30m de espessura e 0,25m de altura e 4,00m de comprimento pesa 195kg. Quanto pesará outra viga de pinho de 0,35m de espessura, 0,40m de altura e 2,50m de comprimento? **R.** *227,5kg.*

29. Aquecendo-se uma barra de aço de 4m,00 de modo que a sua temperatura se eleve de 50 graus, há uma dilatação linear de 0,00044m. De quantos graus se deve elevar a temperatura de uma barra de 6,00m para que haja um aumento de comprimento de 0,000528m? **R.** *90 graus.*

30. Elevando-se de 80 graus a temperatura de 2,5dm^3 de cobre, seu volume aumenta de 10200mm^3. Qual o aumento de volume apresentado por 1dm^3 crescendo de 1 grau a temperatura? **R.** *51mm^3.*

31. Para a capinação de 60500m^2 de área cultivada são necessários 4 homens trabalhando 6 dias. Quantos homens são necessários para uma área tripla, trabalhando 8 dias?

R. *9 homens.*

32. Uma turma de operários cava uma extensão de 15m, de um fosso de 2,1m de largura por 3,00m de altura, trabalhando 9 horas durante 12 dias. Que extensão cavaria de um fosso de 2,50m de largura por 4,00m de altura, trabalhando 8 horas durante 20 dias? **R.** *14 metros.*

33. Em uma cidade de 25000 habitantes são fornecidos 4000000 de litros de água potável em 24 horas. Em uma zona de 8000 habitantes quantos litros deverão ser distribuídos em 9 horas? **R.** *480000 litros.*

34. Em um pensionato de 80 pessoas, a caixa de água potável de 2100 litros deve ser enchida 30 vêzes em 7 dias.

Aumentando o número de pensionistas para 120 e usando-se um reservatório de 2,5m³, quantas vêzes deve-se enchê-lo em 5 dias? R. *27 vêzes.*

35. Pode recolher-se em 20 horas, sôbre um terraço de 12,50m de comprimento por 15,00m de largura, 12000 litros de água pluvial. Se o comprimento fosse de 20,00m, para se recolher um volume duplo de água em 30 horas, que largura deveria ter o terraço? R. *12,50 metros.*

36. Três adultos exalando 20 litros de gás carbônico em uma hora, tornam irrespirável o ar de uma sala hermèticamente fechada de 5,00m de comprimento, 6,00m de largura e 4,00m de altura, em uma hora e 20 minutos. Em quanto tempo cinco meninos, que exalam 10 litros de gás carbônico por hora, viciam a atmosfera de uma sala fechada de 8,00m de comprimento, 5,00m de largura e 4,50m de altura?

R. *2 horas e 24 minutos.*

37. A ração alimentar de um navio, que transporta 150 passageiros em uma viagem de 24 dias, é de 1500grs diárias por pessoa. Se a tripulação se tornasse de 225 pessoas e a viagem durasse 30 dias, qual seria a ração?

R. *De 800grs por pessoa.*

38. Uma cidade de 30000 habitantes tem uma reserva de trigo de 1800 quilos para 6 meses e 12 dias. Tendo a população aumentado de 2000 habitantes e o trigo de 600 quilos, quanto mais será a cidade abastecida?

R. *Mais um mês e 18 dias.*

39. Empregando-se 180m de casimira de 1,6m de largura, fizeram-se 56 ternos e sobraram 12 metros. Quantos metros são necessários, de outra casimira de 1,2m de largura, para a confecção de 80 ternos?

R. *320 metros.*

CAPÍTULO X

Regra de juros

A *regra de juros* tem por fim resolver as questões que dizem respeito ao emprêgo de capitais destinados a produzir lucro, em certas condições.

Na regra de juros distinguem-se os seguintes elementos: *capital, juro, tempo* e *taxa.*

Capital é a quantia empregada na transação.

Juro é o rendimento produzido pelo capital. E' o lucro que o devedor deve juntar ao capital no pagamento.

Tempo é o prazo durante o qual o capital foi empregado para produzir um certo juro.

Taxa é o juro produzido por uma quantia fixa em tempo determinado.

Geralmente, a quantia fixa é 100 e o tempo 1 ano. Assim, 5 por cento ao ano significa que 100 dão um rendimento de 5 em 1 ano. Designa-se abreviadamente: 5% ao ano.

O tempo pode ser expresso em anos, meses ou dias; contudo, para os juros considera-se o ano com 360 dias e o mês com 30 dias.

O juro de um capital depende: 1.º) do *capital;* 2.º) do *tempo* durante o qual o capital é empregado; 3.º) da *taxa.*

O juro é diretamente proporcional ao capital e ao tempo. Assim, um capital duas, três, etc., vêzes maior do que outro, produz um juro também duas, três, etc., vêzes maior, durante o mesmo tempo; além disso, aumentando o tempo, cresce o juro correspondente a um determinado capital.

O juro pode ser *simples* ou *composto*.

Juro simples é aquele em que o capital empregado conserva-se o mesmo durante o tempo da transação. *Juro composto* é aquele em que, em cada unidade de tempo, se reune o juro ao capital, para dar novo juro no tempo seguinte.

Juros simples. — Nas questões de juro, procura-se determinar uma das seguintes quantidades: 1.°) o juro; 2.°) a taxa; 3.°) o capital; 4.°) o tempo.

Conhecendo três destas quantidades, é sempre possível calcular a quarta, o que se consegue resolvendo uma regra de três.

Determinação do juro. — *O juro varia na razão direta do capital e do tempo.*

Exemplo. Calcular o juro produzido por 900$000, durante 4 anos, sob a taxa de 6% ao ano.

1.°) Escrevamos abreviadamente

100 .... 1 a. 6
900000 .... 4 a. x

E' uma regra de três composta que fàcilmente se resolve pelo método prático, como segue

$$x=6\times\frac{4}{1}\times\frac{900000}{100}=6\times4\times9000=216\$000$$

2.°) Ao mesmo resultado chegaremos aplicando o método de redução à unidade.

Se 100, durante 1 ano, produzem 6

1, em 1 ano, renderá ...... $\frac{6}{100}$;

900000 produzirão, em 1 ano $\frac{6\times900000}{100}$

e durante 4 anos renderão ... $\frac{6\times900000\times4}{100}$

Portanto, $x=6\times4\times9000=216\$000$

Determinação da taxa. — *A taxa varia na razão direta do capital e do tempo.*

Exemplo. A que taxa estêve empregado o capital de 12:000$000, durante 3 anos para produzir 3:600$000 de juro?

1.°) Escrevendo abreviadamente, tem-se

12000000 .... 3 a. 3600000
100 .... 1 a. x

Pelo método prático, vem

$$x=3600000\times\frac{100}{12000000}\times\frac{1}{3}=10\%$$

2.°) Pelo método de redução à unidade, vem 12000000 em 3 anos rendem 3600000

1 em 3 anos rende .... $\frac{3600000}{12000000}$

1 em 1 ano rende .... $\frac{3600000}{12000000\times3}$

100 em 1 ano rendem $\frac{3600000\times100}{12000000\times3}$

Assim, $x=10\%$

Determinação do capital. — *O capital varia na razão direta do juro e na razão inversa do tempo.*

Exemplo. Qual será o capital que produz, em 5 anos, a 10%, o juro de 2:500$000?

1.°) Escrevendo abreviadamente, tem-se

10 . . . . . . 1 a. 100
2500000 . . . . . . 5 a. x

Aplicando o método prático, vem

$$x=\frac{100\times2500000}{10}\times\frac{1}{5}=5{:}000\$000$$

Portanto, $x=5{:}000\$000$

2.°) Pelo método de redução à unidade, tem-se: Se para render 10, durante 1 ano, é necessário 100, para render, 1, durante 1 ano, é necessário $\frac{100}{10}$ e para render 2500000, durante 5 anos é necessário $\frac{2500000\times100}{10\times5}$

Assim, $x=5{:}000\$000$

Determinação do tempo. — *O tempo varia na razão inversa do capital e na razão direta do juro.*

Exemplo. Em que tempo o capital de 7:000$000, empregado a 5% ao ano, renderá 350$000 de juros?

1.°) Escrevendo abreviadamente, tem-se

100 . . . . . . 5 . . . . . . 1 a
7000000 . . . . . . 350000 x

Aplicando o método prático, resulta

$$x=1\times\frac{100}{7000000}\times\frac{350000}{5}=1 \text{ ano}$$

Assim, $x=1$ ano

2.°) Pelo método de redução à unidade, vem

Se 100 produzem 5 em . . . . . . 1 ano
1 produz 5 em . . . . 100 anos
1 produz 1 em . . . . $\frac{100}{5}$ anos
7000000 produzem 1 em . . . . . $\frac{100}{5\times7000000}$
7000000 produzem 350000 em . . . $\frac{100\times350000}{5\times7000000}$

Portanto,

$$x=\frac{100\times350000}{5\times7000000}=1 \text{ ano}$$

FÓRMULAS

Fórmula é a expressão que indica as operações que se devem efetuar sôbre quantidades dadas, para obter o valor de uma quantidade desconhecida.

As questões da regra de juros, como veremos, podem ser fàcilmente resolvidas com o emprêgo de fórmulas.

Observações. — Na aplicação das fórmulas deve-se atender o seguinte:

1.ª) Quando a taxa é de ano, o tempo deve ser reduzido a fração do ano, se não for dado em ano.

2.ª) A taxa sendo de mês, o tempo deve ser reduzido a meses se não for dado em meses.

Determinação do juro. — O juro produzido por um certo capital (c), durante um certo tempo (t), sob uma determinada taxa (i), é dado pela fórmula

$$j=\frac{cit}{100}$$

Portanto, *o juro é igual ao produto do capital pela taxa e pelo tempo, dividido por* 100.

Exercícios.

1.° *Pede-se o juro produzido por 900$000, durante 4 anos sob a taxa de 6% ao ano.*

Aplicando a fórmula, encontra-se

$$j=\frac{cit}{100}=\frac{900000\times6\times4}{100}=216\$000$$

2.° *Calcular o juro produzido por 600$000, em 2a. e 8m. sob a taxa de 5% ao ano.*

Reduzindo à fração do ano, tem-se

$$2a.\ e\ 8m.=\frac{2\times12+8}{12}=\frac{32}{12}$$

Aplicando a fórmula, acha-se

$$j=\frac{cit}{100}=\frac{600000\times5\times\frac{32}{12}}{100}=\frac{600000\times5\times32}{100\times12}=80\$000$$

3.° *Pede-se o juro de 1:200$000, em 2a. 9m. e 10d., sob a taxa de 6% ao ano.*

Reduzindo à fração do ano, tem-se

$$2a.\ 9m.\ e\ 10d.=\frac{2\times360+9\times30+10}{360}=\frac{1000}{360}$$

Portanto

$$j=\frac{cit}{100}=\frac{1200000\times5\times\frac{1000}{360}}{100}=\frac{1200000\times6\times1000}{100\times360}=200\$000$$

4.°) *Calcular o juro de 350$000 em 2a. a 1/2% ao mês.*

$$j=\frac{cit}{100}=\frac{350000\times\frac{1}{2}\times24}{100}=\frac{350000\times1\times24}{100\times2}=42\$000$$

Determinação do capital. — Da fórmula

$$j=\frac{cit}{100},\ \text{tira-se}\qquad c=\frac{100j}{it}$$

Portanto, *o capital é igual ao produto do juro por* 100, *dividido pelo produto da taxa pelo tempo.*

Exercícios.

1.° *Pede-se o capital que produziu em 5a., a 10% ao ano o juro de 2:500$000.*

$$c=\frac{100j}{it}=\frac{100\times2500000}{10\times5}=5:000\$000$$

2.° *Pede-se o capital que rende 80$000, durante 2a. e 8m., sob a taxa de 5%.*

$$c=\frac{100j}{it}=\frac{100\times80000}{5\times\frac{32}{12}}=\frac{100\times80000\times12}{5\times32}=600\$000$$

3.° *Pede-se o capital que produziu 200$000 de juros, em 2a. 9m. e 10d. sob a taxa de 6% ao ano.*

$$c=\frac{100j}{it}=\frac{100\times200000}{6\times\frac{1000}{360}}=\frac{100\times200000\times360}{6\times1000}=1:200\$000$$

Determinação da taxa. — Da fórmula

$j = \frac{cit}{100}$, deduz-se $i = \frac{100j}{ct}$

Assim, *a taxa é igual ao produto do juro por* 100, *dividido pelo produto do capital pelo tempo.*

Exercícios.

1.° *O capital 900$000 produziu 216$000 de juro em 4 anos. Calcular a taxa a que foi empregado.*

$$i = \frac{100j}{ct} = \frac{100 \times 216000}{900000 \times 4} = 6\% \text{ ao ano}$$

2.° *O capital de 600$000 produziu o juro de 80$000 em 2a. e 8m. A que taxa esteve empregado?*

$$i = \frac{100j}{ct} = \frac{100 \times 80000}{600000 \times \frac{32}{12}} = \frac{100 \times 80000 \times 12}{600000 \times 32} = 5\% \text{ ao ano}$$

3.° *O capital de 1:200$000 rendeu 200$000 de juro em 2a. 9m. 10d. Pede-se a taxa a que esteve empregado.*

$$i = \frac{100j}{ct} = \frac{100 \times 200000}{1200000 \times \frac{1000}{360}} = \frac{100 \times 200000 \times 360}{1200000 \times 1000} = 6\% \text{ ao ano}$$

Determinação do tempo. — A fórmula

$j = \frac{cit}{100}$ dá $t = \frac{100j}{ci}$

Portanto, *o tempo é igual ao produto do juro por* 100, *dividido pelo produto do capital pela taxa.*

Exercícios.

1.° *Em que tempo o capital de 900$000, a 6% ao ano, produzirá 216$000 de juros?*

$$t = \frac{100j}{ci} = \frac{100 \times 216000}{900000 \times 6} = 4 \text{ anos}$$

2.° *Em que tempo o capital de 600$000, a 5% ao ano, produzirá 80$000 de juros?*

$$t = \frac{100j}{ci} = \frac{100 \times 80000}{600000 \times 5} = \frac{8}{3} = 2 \text{ anos e 8 meses}$$

3.° *Em que tempo o capital de 1:200$000, a 6% ao ano, produzirá 200$000 de juros?*

$$t = \frac{100j}{ci} = \frac{100 \times 200000}{1200000 \times 6} = \frac{25}{9} = 2 \text{ anos, 9 meses e 10 dias}$$

Problemas.

1. Que rendimento produz a importância de 15:200$000, submetida durante 5 anos a juros com a taxa de 6%?
R. *4:560$000.*

2. Quais os juros da quantia de 18:500$000 em 4 anos e 3 meses, com a taxa de 7%?
R. *5:503$750.*

3. Qual o rendimento da quantia de 24:200$000, sob a taxa de 6%, em 3 anos, 5 meses e 18 dias?
R. *5:033$600.*

4. Em 4 anos, 7 meses e 15 dias quanto rendem 8:320$000 submetidos a juros com a taxa de $4\frac{3}{4}\%$?
R. *1:837$800.*

5. A que taxa esteve submetida a importância de 1:140$000 para render 307$800 em 3 anos?
R. *9%.*

6. Deseja-se submeter a juros 1:440$000 para renderem em 3 anos e 8 meses 432$000. Qual deverá ser a taxa?

R. $8\frac{2}{11}\%$.

7. Com que taxa se obteve uma renda de 175$000 com o capital de 700$000 em 5 anos, 6 meses e 20 dias?

R. *4,5%*.

8. No decurso de 1 ano e $\frac{3}{5}$, quanto renderam 3:200$000, submetidos a juros com a taxa de 0,4% ao mês?

R. *245$760*.

9. Depois de quantos anos 5:600$000 rendem 1:508$000 sob a taxa de 3,5%? R. *8 anos*.

10. Qual o tempo necessário para a importância de 3:600$000 render a têrça parte do seu valor, sob a taxa de juros de 5%? R. *6 anos e 8 meses*.

11. Que tempo é necessário para que 3:600$000 se transformem em 3:944$000 submetidos a juros com a taxa de 4%? R. *2 anos, 4 meses e 20 dias*.

12. Com a importância de 3:200$000 obteve-se um rendimento de 360$000 com a taxa de juros de 3/8% ao mês. Qual foi o tempo empregado? R. *2 anos e 6 meses*.

13. Que capital pode ter rendido 615$600 em 6 anos sob a taxa de 4,5%? R. *2:280$000*.

14. Em 2 anos e $\frac{1}{4}$, que capital poderia fornecer 162$000 com a taxa de 0,5% ao mês? R. *1:200$000*.

15. Qual a maior das importâncias: a primeira que rende 57$000 a $4\frac{1}{2}\%$ em 3 meses e 5 dias, ou a outra que rende 56$250 em 2 meses e 21 dias a $\frac{5}{12}\%$ ao mês?

R. *A 2.ª, que é de 5:000$000; a 1.ª é de 4:800$000*.

16. Depois de 4 anos e 8 meses, recebem-se 2:262$000 por uma importância de 1:800$000, que havia sido emprestada mediante juros. Qual a taxa? R. *5,5%*.

17. Um homem emprestou a importância de 12:000$000 a quatro pessoas, durante 3 anos, 10 meses e 20 dias da seguinte forma: à 1.ª um têrço, com a taxa de 3,6%; à 2.ª, um quarto com a taxa de 4,2%; à 3.ª, um oitavo com a taxa de 6%, e o restante à quarta. Qual foi a taxa desta última para que os juros totais houvessem atingido 2:012$500? R. *4,5%*.

CÂMBIO

A *regra de câmbio* tem por fim resolver os problemas relativos à troca de dinheiro entre duas praças comerciais do mesmo país ou de países diferentes.

O *câmbio* é a troca de dinheiro por dinheiro.

Quando a troca se realiza entre duas praças do mesmo país, o câmbio toma o nome de *interno*; quando a troca se dá entre países diferentes, denomina-se *externo*.

No primeiro caso, como as moedas pertencem ao mesmo país, a *taxa de câmbio* é avaliada segundo uma porcentagem convencionada. No segundo caso, a taxa de câmbio é estabelecida convencionando-se que nas relações cambiais uma das praças dá sempre uma quantia determinada (*o certo*), e a outra uma quantia variável (*o incerto*), que corresponde à primeira.

Assim, por exemplo, no câmbio entre o Brasil e a Inglaterra, aquele dá o certo (mil réis brasileiro) e a Inglaterra o incerto (mais ou menos dinheiros

por 1$000). No câmbio com outros países, o Brasil dá sempre o incerto. E' assim que a França e Alemanha dão o certo (1 franco e 1 marco) e o Brasil o incerto, isto é, mais ou menos réis conforme lhe correspondam no momento por um franco e por um marco.

Diz-se que o câmbio está *ao par*, quando a relação entre os valores de duas moedas é estabelecida pela quantidade de metal precioso que elas contêm. Quando, por exemplo, o câmbio entre a Inglaterra e o Brasil está ao par, a taxa é 27 e isto significa que 27 dinheiros é o valor exato de 1$000.

Estando o câmbio ao par, isto é, a 27, tem-se

1 £	corresponde	a	8$889 rs. fracos
1 franco	corresponde	a	353 rs. fracos
1 marco	corresponde	a	436 rs. fracos
100 rs. forte	correspondem	a	200 rs. fracos
etc.			

Resolvamos algumas questões de câmbio entre o Brasil e a Inglaterra.

1.ª *Qual é o valor de 1 libra esterlina, sendo 6 a taxa de câmbio?*

Sendo 6 a taxa de câmbio, 6 dinheiros correspondem a 1000 rs. Procuremos o valor de 1£, isto é, 240 dinheiros, sendo a taxa de câmbio a mesma.

Podemos escrever abreviadamente

6 d. . . . . 1000 rs.
240 d. x

E' uma regra de três simples e direta. Portanto,

$$\frac{6}{240}=\frac{1000}{x}$$

de onde

$$x=\frac{240\times1000}{6}=40\$000$$

2.ª *Qual é o valor de 1 libra esterlina, sendo $14\frac{1}{4}$ a taxa de câmbio?*

Escrevamos abreviadamente

$14\frac{1}{4}$ ou 14,25 d. . . . . . 1000 rs.
240 d. x

Portanto

$$\frac{14,25}{240}=\frac{1000}{x}$$

$$x=\frac{240\times1000}{14,25}=16\$842$$

3.ª *Qual é a taxa de câmbio quando a libra vale 36$000?*

Sabendo-se que 36$000 valem 1£ ou 240d., temos que determinar 1000 rs. quantos dinheiros valem.

Escrevamos

36000 rs. . . . . . . valem 240d.
1000 rs. . . . . . . valerão x

E' uma regra de três simples e direta. Assim,

$$\frac{36000}{1000}=\frac{240}{x}$$

de onde

$$x=\frac{240\times1000}{36000}=6\frac{2}{3}$$

4.ª *Converter* 1:200$000 *em moeda inglesa, sendo de $6\frac{1}{2}$ a taxa de câmbio.*

1000 rs. . . . . . $6\frac{1}{2}$ ou 6,5

$$1200000 \ldots\ldots\ x$$

$$\frac{1000}{1200000}=\frac{6,5}{x}$$

de onde

$$x=\frac{1200000\times 6,5}{1000}=\frac{1200000\times 65}{1000\times 10}=7800\ \text{d.}$$

Reduzindo a número complexo, acha-se

$$x=32£ \text{ e } 10\text{s.}$$

5.ª *Converter* 8£ 10s. 6d., *em moeda nacional, ao câmbio de* $5\frac{3}{4}$.

$$8£\ 10\text{s. } 6\text{d.} =2126 \text{ d. e } 5\frac{3}{4}=5,75$$

$$5,75 \text{ d.} \ldots\ldots\ 1000 \text{ rs.}$$

$$2126 \text{ d.} \ldots\ldots\ x$$

$$\frac{5,75}{2126}=\frac{1000}{x}$$

$$x=\frac{2126\times 1000}{5,75}=\frac{2126\times 1000\times 100}{575}=369\$739$$

Câmbio entre o Brasil e outros países. — A conversão de dinheiro de outros países, em dinheiro brasileiro e viceversa, em que o Brasil dá o incerto, realiza-se da mesma maneira.

Resolvamos algumas questões.

1.ª *Exprimir, em moeda nacional, o valor de 795 francos franceses, ao câmbio de 540.*

Como um franco francês vale 540 rs., 795 valerão

$$795\times 540=429\$300$$

2.ª *Que quantia corresponde, em moeda francesa, ao câmbio de 450, a 1:200$000?*

Se 450 rs. valem 1 franco francês, 1:200$000 valerão

$$\frac{1200000}{450}=2666,6 \text{ francos.}$$

3.ª *Calcular, em moeda nacional, o valor de uma letra de câmbio de 320 dólares, ao câmbio de 6$800.*

Se 1 dólar vale 6$800, 320 dólares valerão

$$6800\times 320=2:176\$000$$

4.ª *Ao câmbio de 72$000, converter 1:800$000 em dólares.*

$$\frac{1800000}{72000}=25 \text{ dólares}$$

5.ª *Exprimir, em moeda nacional, o valor de 1540 marcos, ao câmbio de 3450 rs.*

$$3450\times 1540=5:313\$000$$

6.ª *Calcular, em moeda alemã, o valor de uma letra de câmbio de 6:592$000, ao câmbio de 3$200.*

$$\frac{6592000}{3200}=2060 \text{ marcos.}$$

Exercícios.

Calcular o valor da libra esterlina com as taxas de câmbio seguintes:

1. 8 — R. 30$000
2. 5 — R. 48$000
3. $7\frac{3}{4}$ — R. 30$967
4. $10\frac{1}{2}$ — R. 22$857
5. $12\frac{5}{8}$ — R. 19$009

Determinar a taxa de câmbio quando:

6. 1£ equivale a 120$000 — R. 2
7. 4£ equivalem a 250$000 — R. $3\frac{21}{25}$
8. 5£ 10s. equivalem a 220$000 — R. 6
9. 14£ 18s. 10d. equivalem a 358$600 — R. 10

Converter em moeda nacional:

10. 12£ ao câmbio de 15 — R. 192$000
11. 5£ 8s. ao câmbio de 8 — R. 162$000
12. 6£ 10s. 8d. ao câmbio de 6 — R. 261$333
13. 9£ 12s. 5d. ao câmbio de $8\frac{3}{5}$ — R. 268$488

Converter em moeda inglesa:

14. 85$000 ao câmbio de 8 — R. 2£ 16s. 8d.
15. 350$000 ao câmbio de $4\frac{1}{2}$ — R. 6£ 11s. 3d.
16. 500$000 ao câmbio de $5\frac{3}{4}$ — R. 11£ 19s. 7d.
17. 1:200$000 ao câmbio de $6\frac{1}{4}$ — R. 31£ 5s.

Exprimir, em moeda nacional, o valor de:

18. 485 francos, ao câmbio de $320 — R. 155$200
19. 28 dólares, ao câmbio de 8$650 — R. 242$200
20. 530 marcos, ao câmbio de 3$600 — R. 1:908$000
21. 1240 pesos, ao câmbio de 5$040 — R. 6:249$600

Converter o valor de 900$000:

22. Em francos, ao câmbio de $300 — R. 3000 francos
23. Em dólares, ao câmbio de 4$500 — R. 200 dólares
24. Em marcos, ao câmbio de 4$000 — R. 225 marcos
25. Em pesos, ao câmbio de 6$000 — R. 150 pesos

ÍNDICE

CAPÍTULO I

CAPÍTULO II

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO V

CAPÍTULO VI

CAPÍTULO VII

CAPÍTULO VIII

CAPÍTULO IX

CAPÍTULO X

Preço dêste vol. 7$000

São Paulo Editora Limitada Impr.